

# MAT 1741 – Test de pratique

Professeur : Abdelkrim El basraoui

Nom : \_\_\_\_\_

Choix multiples → {

Prénom : \_\_\_\_\_

Numéro d'étudiant : \_\_\_\_\_

Pour le correcteur → {

1	C
2	A
3	D
4	
5	
6	
[Bonus] 7	
Total	

- La durée de cet examen est **80 minutes**.
- Cet examen est à livre fermé et vos notes de cours ne seront pas allouées. L'utilisation de calculatrice, téléphone cellulaire, pagette ou tout autre appareil qui peut transmettre ou stocker de l'information **n'est pas permise**.
- Prenez le temps de lire tout le document avant de commencer et lisez chaque question attentivement. **Répondez à toutes les questions dans l'espace fourni après chaque question**. Pour les questions 4 à 7, vous pouvez utiliser l'endos des pages si vous en avez besoin, par contre n'oubliez pas de l'indiquer pour le correcteur.
- Les questions 1 à 3 sont à choix multiples et valent 1 point chacune. Il n'y aura aucun point partiel. Vous devez écrire votre réponse dans le tableau fourni ci-dessus.
- Les questions 4 à 6 valent 6 points chacune. **Les bonnes réponses pour ces questions doivent être justifiées et écrites de façon logique et lisible; vous devez convaincre le correcteur que vous savez pourquoi votre réponse est la bonne.** La Question 7 est une question bonus qui vaut 3 points.
- Lorsque vous le pouvez, il est fortement recommandé de vérifier votre travail.

**Bonne Chance!**

1. Soit  $A$  une matrice de type  $2015 \times 1741$ . Sachant que  $\text{rg}(A) = 1720$ , alors

- A.  $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^{1741}$  et  $\dim \text{Nul}(A) = 1720$
- B.  $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^{1720}$  et  $\dim \text{Nul}(A) = 1741$
- C.  $\dim \text{Col}(A) = 1720$  et  $\dim \text{Nul}(A) = 21$
- D.  $\dim \text{Col}(A) = 1741$  et  $\text{Nul}(A) = \mathbb{R}^{2015}$
- E.  $\dim \text{Col}(A) = 274$  et  $\text{Nul}(A) = \mathbb{R}^{1720}$
- F.  $\text{Col}(A) = \{0\}$  et  $\dim \text{Nul}(A) = 274$

2. Soit  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ . La première ligne de  $B^{-1}$  est:

- A.  $[-1/2 \ 1 \ -1/2]$
- B.  $[-1 \ 1 \ -1]$
- C.  $[5/4 \ -1 \ 1/4]$
- D.  $[1/4 \ 0 \ 1/4]$
- E.  $[1 \ 0 \ -1]$
- F.  $B$  n'est pas inversible.

3. Soit  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  et soit  $W = \{B \in \mathbb{M}_{22} \mid AB = 0\}$ , où  $\mathbb{M}_{22}$  est l'espace des matrices d'ordre 2. Lequel des énoncés suivants est vrai?

- A.  $W$  n'est pas un sous-espace de  $\mathbb{M}_{22}$
- B.  $W$  est un sous-espace de  $\mathbb{M}_{22}$  et  $\dim W = 4$
- C.  $W$  est un sous-espace de  $\mathbb{M}_{22}$  et  $\dim W = 3$
- D.  $W$  est un sous-espace de  $\mathbb{M}_{22}$  et  $\dim W = 2$
- E.  $W$  est un sous-espace de  $\mathbb{M}_{22}$  et  $\dim W = 1$
- F.  $W$  est un sous-espace de  $\mathbb{M}_{22}$  et  $\dim W = 0$

4. Considérez la matrice  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ .

(a) Trouvez une base pour Col  $A$ . En déduire le rang de  $A$ .

**Solution:** Montrez que la matrice échelonnée réduite de  $A$  est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les colonnes pivots de  $A$  sont la 1ère, 2ème et la 4ème. Donc une base pour Col  $A$  est

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

$$\text{rg } A = \# \text{ pivots} = 3.$$

(b) Trouvez une base de Nul  $A$  et donnez sa dimension.

**Solution:** Pour trouver une base de Nul  $A$  on doit trouver la solution générale de  $A\vec{x} = \vec{0}$  sous forme paramétrique. De la M.E.R. de  $A$  on a  $x_1 = -5x_3$ ,  $x_2 = 2x_3$ ,  $x_3$  libre et  $x_4 = 0$ . La solution de  $A\vec{x} = \vec{0}$  est donc

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

Une base pour Nul  $A$  est  $\left\{ \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ .

$$\dim \text{Nul } A = 1 = \# \text{ variables libres}.$$

(c) Donnez une base du complémentaire orthogonal de Lig  $A$ .

**Solution:**  $(\text{Lig } A)^\perp = \text{Nul } A$ . Donc on prend pour base la base de Nul  $A$ .

5. Soit  $U = \{(x, y, z) \mid -x + y + z = 0\}$

a) Trouvez une base pour  $U$ .

**Solution:** On a  $U = \mathcal{L}\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$  avec base  $\{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 0, 1)\}$ .

b) Utilisez l'algorithme de Gram-Schmidt pour trouvez une base orthogonale de  $U$ .

**Solution:** On pose  $v_1 = u_1 = (1, 1, 0)$  et donc  $v_2 = u_2 - \text{proj}_{v_1} u_2 = (1/2, -1/2, 1)$ .  $\{v_1, v_2\}$  est une base orthogonale de  $U$ .

c) Donnez la meilleur approximation de  $v = (1, -1, 2)$  par un vecteur de  $U$ .

**Solution:** C'est  $\text{proj}_U v$ . Exercice

d) Étendre la base trouvée dans (a) en une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**Solution:** Prendre la matrice  $A = [u_1 u_2]^T$  puis trouvez  $\text{Nul } A$ . La base de  $\text{Nul } A$  complète la base dans (a) en une base de  $\mathbb{R}^3$ .

6(a). Répondre par Vrai ou Faux en justifiant votre réponse.

(i) Si  $A$  est une matrice inversible d'ordre  $n$  telle que  $AB = BA$  alors  $B = I_n$ .

Réponse :

**Solution:**FAUX. Pour  $n = 2$ , prendre par

exemple  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Donc  $\det(A) = 1 \neq 0$  et donc  $A$  est inversible. Si  $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  est

telle que  $AB = BA$  on aurait  $\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow a = a+c, b+d = a+b, c = c, d = c+d \Leftrightarrow c = 0, a = d.$$

Donc  $B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ . Pour  $a \neq 1$  et/ou  $b \neq 0$  on a  $B \neq I_n$ .

(ii) Les lignes d'une matrice  $1741 \times 1720$  sont toujours linéairement indépendantes.

Réponse :

**Solution:**FAUX. Prendre une matrice avec la même ligne qui se répète. Alors les lignes sont linéairement dépendantes.

**6(b).** Soit  $A$  une matrice d'ordre  $n$  avec des entrées réelles. Donner trois énoncés équivalents à

“ $A$  est inversible”

(i)

(ii)

(iii)

**Solution:** Voir notes de cours.