Université d'Ottawa

Départment de Mathématiques et Statistique

MAT 1702C: Méthodes mathématiques II
Professeure: Yasmine Samia

Partiel 1 – 29 Septembre 2016

Nom ______________________ Prénom ______________________

d'étudiant ______________________ Solutions

Instructions:

(1) Vous avez 80 minutes pour compléter cet examen.
(2) Montrez les détails de votre travail et justifiez vos réponses pour avoir des notes complètes.
(3) La valeur de chaque question est indiquée entre parenthèses, au début de la question.
(4) Tout le travail qui va être considéré pour la correction devrait être rédigé dans l'espace prévu. Le verso des pages est pour le brouillon. Si vous trouvez que vous avez besoin d'espace supplémentaire afin de répondre à une question particulière, vous devez continuer sur le verso de la page et indiquer celà **clairement**. Sinon, ce que vous écrivez sur le verso des pages ne sera pas considéré pour la correction.
(5) L'utilisation de documents (notes de cours, livres, brouillon, etc), de calculatrice, de téléphones cellulaires ou de tout autre appareil électronique est **interdite**.
(6) La dernière page de l'examen peut être utilisée comme brouillon.
(7) Bonne chance!

SVP ne pas écrire dans le tableau ci-dessous.

Question	1	2	3	4	5	Total
Maximum	3	4	2	4	2	15
Note						

1. **(3 points)** Déterminez si l'équation vectorielle suivante

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

admet une solution ou non. Si oui, déterminez sa solution générale.

On réduit la matrice augmentée associée à cette éqt vectorielle :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2-2L_1\to L_2]{L_3-L_1\to L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3-L_2\to L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{L_2}{3}\to L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1+L_2\to L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{(RREF)}$$

$\Rightarrow$ Le système est compatible. De plus, x_1 et x_3 sont des variables de base, x_2 et x_4 sont les variables libres.

$\Rightarrow$ Sol. générale : $\begin{cases} x_1 = 2x_2 - x_4 + 2 \\ x_3 = 2x_4 + 1 \\ x_2, x_4 \text{ libres} \end{cases}$

2. **(4 points)** Est-ce que le système linéaire suivant est compatible? Si oui, trouvez sa solution générale.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & + & 3w & = & 2 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & + & 4w & = & 5 \\ 5x & + & 10y & - & 8z & + & 11w & = & 12 \end{array}$$

On réduit la matrice augmentée associée à ce système :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2-2L_1\to L_2]{L_3-5L_1\to L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3-2L_2\to L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1+2L_2\to L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Donc le système est compatible.

Les variables de base sont x et z

Les variables libres sont y et w.

$\rightarrow$ Sol. générale : $\begin{cases} x = -2y + w + 4 \\ z = 2w + 1 \\ y, w \text{ libres} \end{cases}$

3. **(2 points)** Trouvez la ou les valeurs de h pour lesquelles le système suivant admet une solution unique:

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 7 \\ -9x & + & hy & = & 8 \end{array}$$

On écrit la matrice augmentée du système et on trouve la forme échelonnée :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ -9 & h & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2+9L_1 \to L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & h+9 & 71 \end{array}\right]$$

Pour avoir une solution unique, il faut que

$h+9 \neq 0 \Rightarrow h \neq -9$.

4. **(4 points)** Soit les vecteurs suivants:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Est-ce que le vecteur $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ appartient à $\mathcal{L}\{v_1, v_2, v_3\}$? Justifiez votre réponse!

On écrit ces vecteurs dans une matrice augmentée et on la réduit :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3-2L_1 \to L_3]{L_2-L_1 \to L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_4+L_2 \to L_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_4-L_3 \to L_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

D'après la forme échelonnée, le système est compatible.

Donc OUI, $\vec{b} \in \mathcal{L}\{v_1, v_2, v_3\}$.

5. **(2 points)** Quelles propositions sont VRAIES? Encerclez seulement les numéros correspondants aux propositions vraies.

a) Dans certains cas, une matrice de type 5×5 peut être réduite à plusieurs formes échelonnées réduites, suivant différentes séries d'opérations sur les lignes.

b) Si une ligne dans la forme échelonnée d'une matrice augmentée est $[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 7|0]$, alors le système linéaire associé est incompatible.

c) On a que $2\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}-2\\4\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\-8\\11\end{bmatrix}$.

d) On a que $\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\0 & -5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\\7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$