Introduction à l'Algèbre linéaire (MAT1741 3X)
EXAMEN PARTIEL (13 Juin 2012)
Professeur: Joseph Khoury **Durée: 80 minutes**

Nom de famille: Solution

Prénom: ______

Numéro d'étudiant: ______

Aucune note n'est permise.
Les calculatrices sont permises.

Cet examen comporte 8 questions et 9 pages. Les questions à choix multiples (1 à 5) valent chacune 3 points sur les 30 points que compte l'examen. Inscrire à l'ENCRE dans les cases ci-dessous les LETTRES correspondant aux réponses à ces questions.

1	2	3	4	5

Les questions 6 à 8 sont à développement et requièrent une réponse détaillée. Prenez soin de bien rédiger votre solution. Vous pouvez utiliser le verso des pages si vous manquez d'espace au recto.

1. Trouver le **rang** de la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 11 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}.$$

A. 3
B. 2
C. 1
D. 0
E. 4
F. Aucune de ces réponses

Solution

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 11 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

le rang est $\boxed{2}$

2. La forme polaire du nombre complexe:

$$\frac{1+i}{1-\sqrt{3}i}$$

est:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\left(i\frac{\pi}{12}\right)}$
B. $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\left(-i\frac{7\pi}{12}\right)}$
C. Aucune de ces réponses
D. $\frac{2}{\sqrt{2}}e^{\left(-i\frac{\pi}{12}\right)}$
E. $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\left(i\frac{7\pi}{12}\right)}$
F. $\frac{2}{\sqrt{2}}e^{\left(i\frac{5\pi}{12}\right)}$

Solution $|1+i| = \sqrt{2} \Rightarrow 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\, e^{(i\pi/4)}$

$|1-\sqrt{3}i| = 2 \Rightarrow 1-\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\, e^{-(i\pi/3)}$

Alors $\frac{1+i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{2}\, e^{(i\pi/4)}}{2\, e^{-i\pi/3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i[\pi/4 - (-\pi/3)]} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}}$

3. Quel est le volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs $\vec{u} = [1, 0, 2]$, $\vec{v} = [0, 1, -2]$ et $\vec{w} = [0, 1, 3]$.

A. 5 **B.** Aucune de ces réponses
C. 1 **D.** 2
E. 3 **F.** 7

Solution

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{5}$$

4. Les équations paramétriques de la droite d'intersection des plans $x - 2y = 1$ et $x + y - z = 0$ sont:

A. $x = -2t + 1,\ y = t,\ z = -3t + 1;\ t \in \mathbb{R}$
B. $x = 2t + 1,\ y = t,\ z = -3t + 1;\ t \in \mathbb{R}$
C. Aucune de ces réponses
D. $x = 2t + 1,\ y = t,\ z = 3t + 1;\ t \in \mathbb{R}$
E. $x = -2t + 1,\ y = -t,\ z = 3t + 1;\ t \in \mathbb{R}$
F. $x = -2t + 1,\ y = t,\ z = 3t + 1;\ t \in \mathbb{R}$

Solution Les vecteurs normaux aux plans sont $(1, -2, 0)$ et $(1, 1, -1)$
La droite d'intersection est parallèle à leur produit vectoriel

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = [2, 1, 3] .$$

Pour $y = 0$, $x = 1$ et $x - z = 0 \Rightarrow z = 1$. Alors $(1, 0, 1)$ est un point sur la droite :

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t \\ z = 3t + 1 \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R}$$

5. Considérer les trois matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donner l'entrée à la deuxième ligne et la deuxième colonne de la matrice $\left(2A^T - B\right) C$.

A. Aucune de ces réponses **B.** 1
C. -1 **D.** -3
E. 0 **F.** 3

<u>Solution</u> $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2A^T - B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

l'entrée à la deuxième ligne et deuxième colonne de $(2A^T - B)C$ est le produit de la deuxième ligne de $2A^T - C$ et deuxième colonne de C:

$5(0) + 1(1) + (-2)(-1) = \boxed{3}$

6. **[5 points]** Considérer la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 6 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Utiliser l'Algorithme de Gauss-Jordan pour trouver A^{-1}.
(b) Utiliser la réponse à la partie (a) pour trouver une matrice B qui satisfait

$$\left(B^T + 2I_3\right)^{-1} = A$$

où I_3 est la matrice identité d'ordre 3.

Solution (a)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right]$$ Alors $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $(B^T + 2I_3)^{-1} = A \Rightarrow B^T + 2I_3 = A^{-1} \Rightarrow B^T = A^{-1} - 2I_3 \Rightarrow$

$$B = (A^{-1} - 2I_3)^T = \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}^T$$

$$\Rightarrow \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

7. **[5 points]**
Considérer le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = -8 \\ x + z = 2 \\ 2x + 2y + az = b \end{cases}$$

où a et b sont deux nombres réels.

(1) Trouver les valeurs de a et b telles que le système:

(i) admet une solution unique

(ii) admet une infinité de solutions,

(iii) est incompatible.

(2) Dans le (ii),

(a) donner la solution générale du système,

(b) donner une description géométrique complète de cette solution.

Solution (1) $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & a & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & a & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & a-2 & b-4 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & a-2 & b-4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-4 & b \end{array}\right]$

(i) Solution unique $\Leftrightarrow$ rg $A =$ rg$[A|B] = 3 \Leftrightarrow a \neq 4$

(ii) infinité de solutions $\Leftrightarrow$ rg $A =$ rg$[A|B] = 2 \Leftrightarrow a = 4$ et $b = 0$

(iii) Système incompatible $\Leftrightarrow$ rg $A \neq$ rg$[A|B] \Leftrightarrow a = 4$ et $b \neq 0$

(2) Dans le cas (ii), $a = 4$ et $b = 0$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $z = t$ est une variable libre

$x = -t + 2$ et $y = -t - 2$

(a) La solution générale est $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) C'est la droite passant par le point $(2, -2, 0)$ et parallèle au vecteur $[-1, -1, 1]$

8. [5 points] Les cinq parties de cette question sont indépendentes.

(1) Si le rang de la matrice des coefficients d'un système homogène à 10 équations et 8 inconnus est 4, Quel est le nombre de paramètres dans la solution générale du système?

(2) Écrivez le nombre complexe $z = \frac{i}{1+i}$ sous la forme standard $a + ib$.

(3) Pour quelle(s) valeur(s) du nombre réel a, les deux vecteurs $\vec{u} = [1, 1-a, 3]$ et $\vec{v} = [a^2, -3, 1]$ sont-ils perpendiculaires?

(4) Est-il possible pour un système linéaire à 7 équations et 3 inconnus d'avoir une solution unique?

(5) Si A est une matrice carrée d'ordre n telle que $A^3 - 2A \ - 4I_n = 0$, trouver A^{-1}.

Solution (1) # paramètres = # inconnus − rg(A) = $8 - 4 = \boxed{4}$

(2) $$z = \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{i - i^2}{1 - i^2} = \frac{1+i}{2} = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i}$$

(3) $$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff 1(a^2) + (1-a)(-3) + 3(1) = 0$$

$$\iff a^2 - 3 + 3a + 3 = 0 \iff a^2 + 3a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0,\ a = -3}$$

(4) $\boxed{\text{Oui}}$: $rg(A) = rg[A|B] = 3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Exemple d'un système à 7 équations et 3 inconnus avec une solution unique

(5) $$A^3 - 2A = 4I_n \Rightarrow A(A^2 - 2I_n) = 4I_n \Rightarrow A \cdot \left[\frac{1}{4}(A^2 - 2I_n)\right] = I_n$$

Alors $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 2I_n)}$