Mat 1741, Automne 2015

TEST 3, v.1

1. Soit A une matrice de format (4×5). Rappelons que $\ker A = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid Ax = 0\}$ et $\text{col } A = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^5\}$. Si le rang de $A = 4$, alors

A. col $A = \mathbb{R}^4$ et $\dim \ker A = 1$
B. col $A = \mathbb{R}^4$ et $\dim \ker A = 4$
C. $\dim \text{col } A = 1$ et $\dim \ker A = 1$
D. $\dim \text{col } A = 1$ et $\ker A = \mathbb{R}^5$
E. $\dim \text{col } A = 4$ et $\ker A = \mathbb{R}^5$
F. col $A = \{0\}$ et $\dim \ker A = 4$

$\dim(\text{Col } A) = \dim(\text{Im } A) = \text{rg } A = 4$.

$\dim(\ker A) = 5 - \text{rg}(A) = 1$.

Comme $\text{Col}(A)$ est un sev de $\mathbb{R}^4$, de dim 4, $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^4$.

2. Soit $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. La troisième ligne de B^{-1} est:

A. $[0 \ \ 1 \ \ -1]$
B. $[-1 \ \ 1 \ \ 0]$
C. $[0 \ \ -1 \ \ 1]$
D. $[1 \ \ -1 \ \ 0]$
E. $[1 \ \ 0 \ \ -1]$
F. B n'est pas inversible.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{②-① \\ ③-①}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{②-③ \\ -1\cdot③}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{①-②}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

3. Soit $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et considérons le sous-ensemble $W = \{A \in \mathbb{M}_2 \mid SA = AS\}$.

Parmi les énoncés suivants, lequel est correct?

A. W n'est pas un sous-espace de $\mathbb{M}_2$
B. W est un sous-espace de $\mathbb{M}_2$, et $\dim W = 4$
C. W est un sous-espace de $\mathbb{M}_2$, et $\dim W = 3$
D. W est un sous-espace de $\mathbb{M}_2$, et $\dim W = 2$
E. W est un sous-espace de $\mathbb{M}_2$, et $\dim W = 1$
F. W est un sous-espace de $\mathbb{M}_2$, et $\dim W = 0$

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $SA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $AS = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix}$

D'où $SA = AS$ ssi $c = 0$ et $b + d = a$.

D'où $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & a-d \\ 0 & d \end{pmatrix} ; a, d \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

et donc W est un sev de $\mathbb{M}_2$.

Comme $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est un ens. lin. indép.,

$\dim W = 2$

$\underline{\text{///}}$ Si $a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$, alors $\begin{pmatrix} a & a-d \\ 0 & d \end{pmatrix} = 0$ et donc $a = d = 0$ $\underline{\text{///}}$

4. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R}).$$

a) Trouver une base B_1 du sous-espace ligne de A.

b) Trouver une base de l'espace colonne de A.

c) Trouver une base B_2 du noyau $\ker A = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$.

d) Calculer le produit scalaire entre chacun des vecteurs transposés de B_1 et ceux de B_2.

a) $A \underset{\substack{②-2①\\ ③-①}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{-1\cdot ②\\ ③+②}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A}$

$$\begin{array}{cccc} & \uparrow & & \uparrow \\ & t & & s \end{array}$$

D'où $B_1 = \{ \underbrace{(1,1,0,-1)}_{v_1}, \underbrace{(0,0,1,-3)}_{v_2} \}$ base de Row(A).

b) Les colonnes ① et ③ de $\tilde{A}$ sont dominantes, d'où $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ forme une base de Col(A).

c) $\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -t+s \\ t \\ 3s \\ s \end{pmatrix} ; s,t \in \mathbb{R} \right\}$.

Comme $w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont les 2 sol. fond. de $Ax=0$, ces vecteurs forment une base B_2 de $\ker A$.

d) On vérifie que $v_i \cdot w_j = 0$ pour $i = 1,2$; $j = 1,2$

5. Soit V l'enveloppe linéaire de $\begin{array}{ccccc} v_1 & & v_2 & & v_3 \\ \| & & \| & & \| \\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} & , & \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} & \text{et} & \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\0\end{pmatrix} \end{array}.$

a) Utiliser l'algorithme de Gram Schmidt pour trouver une base orthogonale B de V.

b) Trouver la meilleure approximation (notée v) dans V du vecteur $w = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

c) Etendre la base B de V en une base de $\mathbb{R}^4$.

a) Rem: $\{v_1, v_2, v_3\}$ sont lin. indép !

Posons $f_1 = v_1$, $f_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot f_1}{\|f_1\|^2} f_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$

$$f_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot f_1}{\|f_1\|^2} f_1 - \frac{v_3 \cdot f_2}{\|f_2\|^2} f_2 = v_3 = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

D'où $B = \{f_1, f_2, f_3\}$.

b) On a: $v = \mathrm{proj}_V(w) = \frac{w \cdot f_1}{\|f_1\|^2} f_1 + \frac{w \cdot f_2}{\|f_2\|^2} f_2 + \frac{w \cdot f_3}{\|f_3\|^2} f_3$

On a: $w \cdot f_1 = 0$, $w \cdot f_2 = 1$ et $w \cdot f_3 = -1$.

$\|f_1\|^2 = 2$ $\quad \|f_2\|^2 = \frac{1}{2}$ $\quad \|f_3\|^2 = 2$

D'où $v = 2 \cdot f_2 - \frac{1}{2} f_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1/2\\1/2\\-1\end{pmatrix}$

c) Soit $A = \begin{pmatrix} f_1^t \\ f_2^t \\ f_3^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

colonne non dominante

D'où $\left\{ f_1, f_2, f_3, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathbb{R}^4$.

6(a). Dans chaque cas, indiquer dans la boite correspondante si l'énoncé ci-dessous est (toujours) vrai ou peut être faux.

- Si vous estimez que l'énoncé est faux, donner un contre-exemple explicite.
- Si vous estimez que l'énoncé est (toujours) vrai, vous devez le justifier avec une explication claire.

i) Si A est une matrice inversible et si $AB = 0$, alors $B = 0$

Si A est inversible, alors $A \in \mathbb{M}_n$ et A^{-1} existe, d'où

Comme AB existe, $B \in \mathbb{M}_{n,k}$ et

$B = \mathbb{1}_n B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}0 = 0.$

REPONSE: OUI

i) Les colonnes d'une matrice A ~~de~~ format (4×3) sont toujours linéairement dépendantes.

$A \in \mathbb{M}_{4,3}$, d'où $A = (a_1\ a_2\ a_3)$ où $a_i \in \mathbb{R}^4$ i-ème colonne de A.

Soit $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\{a_1, a_2, a_3\}$ sont lin. indép.

RÉPONSE: NON

6(b).

Soit A une matrice de format $(n \times n)$ à coefficients réels. Donner trois énoncés équivalents à l'énoncé suivant:

"Le système $Ax = 0$ a une infinité de solutions" (*).

(i) En utilisant le rang de A:

Si $E = \{x \in \mathbb{R}^n ; Ax = 0\}$, alors $\dim(E) = n - rg(A)$

$E \neq \{0\}$ ssi $\dim(E) > 0$ ssi $rg(A) < n$.

(ii) En utilisant la forme échelonnée réduite ~~de~~ $\tilde{A}$ de A:

(*) $\Leftrightarrow rg(A) < n \Leftrightarrow \tilde{A}$ a au moins une ligne de zéros.

(iii) En terme des colonnes de A:

Le sev $Col(A)$ de $\mathbb{R}^n$ est de dim. $rg(A)$.

D'où (*) $\Leftrightarrow Col(A) \subsetneq \mathbb{R}^n$.

7. [Bonus] Soit W l'enveloppe linéaire de $\overset{w_1}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}}$ et $\overset{w_2}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}}}$. Trouver une matrice A de format (2×4) telle que $\ker A = W$.

(Vous devez justifier votre réponse.)

$W = \text{Span}\{w_1, w_2\} \subseteq \mathbb{R}^4$

On cherche une matrice $A \in M_{2,4}$, échelonnée réduite tq. $\ker A = W$.

Comme $\dim W = 2$, on a $\text{rg}\, A = 2$.

Ecrivons $A = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$.

Comme $r_1 w_1 = r_1 w_2 = 0$ et $r_2 w_1 = r_2 w_2 = 0$, on a.

$a_{i1} + a_{i4} = a_{i1} + a_{i3} = 0$ pour $i = 1, 2$. et donc

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & -a_{11} & -a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & -a_{21} & -a_{21} \end{pmatrix}.$$

Comme A est échelonnée réduite, $a_{11} = 1$ et $a_{21} = 0$. et donc $a_{22} = 1$. D'où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$