MAT 1730, Automne 2016, Devoir 5
Prof: Ndouné Ndouné
Échéance jeudi 10 Novembre avant 20h:00.

Les devoirs en retard ne seront pas acceptés; ni les devoirs non agrafés. Les professeurs du département de math-stat ne pouront pas vous prêter une agrafeuse; ne demandez pas une.

DGD à encercler: **DGD 1** **DGD 2**

Solutionnaire

Nom et prénom ____________________ Numéro d'étudiant ________________

Nom et prénom ____________________ Numéro d'étudiant ________________

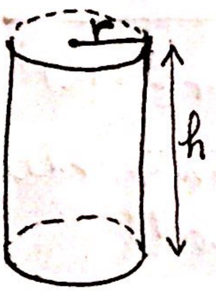
Nom et prénom ____________________ Numéro d'étudiant ________________

En signant ci-dessous, nous déclarons que ce travail est le nôtre et que nous n'avons pas copié à partir d'une autre source individuelle ou autre.

Signatures ____

QUESTION 1. Une compagnie veut construire un contenant cylindrique avec un couvercle semi-sphérique. Pour un volume fixe V, la compagnie voudrait utiliser le minimum de matériau pour le contenant et le couvercle combinés. Vous pouvez supposer que l'épaisseur du matériau est le même partout, de sorte que la quantité du matériau est proportionnelle à l'aire A de la surface du contenant et du couvercle combinés. Quel est le rayon optimal r et quelle est la hauteur optimale h du contenant?

Réponse: Les valeurs optimales de r et h sont $\boxed{r = \sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}} = 3^{2/3} \cdot \left(\frac{V}{\pi}\right)^{1/3}}$



- Le volume est $V = \pi r^2 h$ (1)
- L'aire ~~ou~~ (la surface) est: L'aire latérale du cylindre + l'aire du cercle de base + l'aire de la demi-sphère.

$A = 2\pi r h + \pi r^2 + 2\pi r^2$ (2)

- On sait que $V = \pi r^2 h$; donc $h = \frac{V}{\pi r^2}$
- on remplace h par sa valeur dans (2) : $A(r) = \frac{2V}{r} + 3\pi r^2$
- La dérivée $A'(r) = -\frac{2V}{r^2} + 6\pi r$; $A'(r) = 0 \iff r = \sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}$.
- $A''(r) = \frac{4V}{r^3} + 6\pi > 0$ for all $r > 0$

$\Rightarrow$ A est concave vers le haut $\forall r > 0$

En $r = \sqrt[3]{V}$ on a un minimum local et global.

Scanned by CamScanner

$\boxed{y = f'(1)(x-1) + f(1)}$ ou $y = (7+b)(x-1) + (3+b)$
$= (7+b)x - 4$

QUESTION 2. On considère la fonction définie par $f(x) = x^3 + 2x^2 + bx$.
1) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction en $x = 1$.

Réponse: $y = \boxed{(7+b)x - 4}$

$f'(x) = 3x^2 + 4x + b$

$f'(1) = 7 + b$

• $f(1) = 3 + b$

$y = (7+b)x + C$

• $3 + b = 7 + b + C$

d'où $C = -4$

[$(1, f(1))$ est un point de la tangente]

2) Déterminer l'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses.

Réponse: $\boxed{\dfrac{4}{7+b}}$ $b \neq 0$.

L'axe des abscisses a pour équation $y = 0$.

Donc $(7+b)x - 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4}{7+b}$.

Si $b = -7$ il n'y a pas de point d'intersection

3) Pour quelle(s) valeur(s) de b il n'existe pas de point d'intersection? Justifiez votre réponse?

L'axe des abscisses a pour équation $y = 0$; La tangente est parallèle à cet axe si sa pente est nulle ($y = -4$)

Donc $7 + b = 0$, ie $\boxed{b = -7}$

QUESTION 3. Calculer la distance de la droite $y = 2x + 6$ au cercle $x^2 + y^2 = 0.5$.
[Indication: Trouver le point de la droite le plus proche au centre du cercle.]

Réponse: La distance est

• La distance entre le point de coordonnées (x, y) de la droite et le centre du cercle $(0,0)$ est : $d = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2 + (2x+6)^2}$

Minimiser d est équivalent à minimiser $D(x) = 5x^2 + 24x + 36$

• Les points critiques de $D(x) = 5x^2 + 24x + 36$ sont:

$D'(x) = 10x + 24$; $D'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-24}{10} = -2.4$

$D''(x) = 10 > 0$ donc $D(x)$ est concave vers le haut $\forall x$.

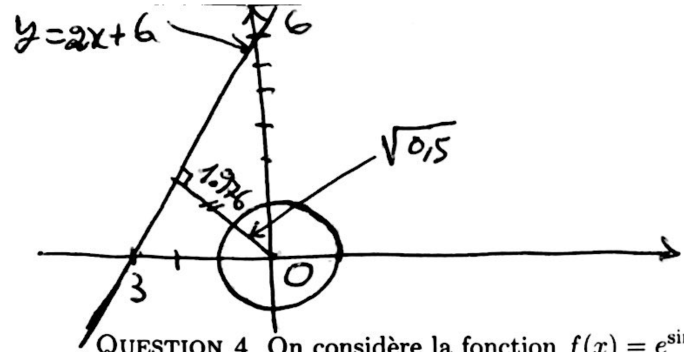
En $x = -2.4$ nous avons un minimum global.

• Pour $x = -2.4$, $y = 2(-2.4) + 6 = 1.2 \Rightarrow P(-2.4, 1.2)$ est le point de la droite le plus proche du cercle.

• La distance de P à O est $d(-2.4) = \sqrt{7.2} = 2.683$

• La distance de P au cercle est $= 2.683 - \sqrt{0.5} = 1.976$

Scanned by CamScanner



Question 4. On considère la fonction $f(x) = e^{\sin(\cos(x))}$ définie sur l'intervalle $[0, 4\pi]$.

1) Les points critiques de f sont $\boxed{x = 0, x = \pi, x = 2\pi, x = 3\pi, x = 4\pi}$

$f'(x) = -\sin(x)\cos(\cos(x)) \cdot e^{\sin(\cos(x))}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \sin(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi, 4\pi$

on remarque que $\cos(\cos(x)) > 0$ car son image est $[\underbrace{\cos(1)}_{>0}, 1]$

2) Les maximums locaux sont aux points $\boxed{x = 2\pi}$

Les minimums locaux sont aux points $\boxed{x = \pi, \quad x = 3\pi}$

Le signe de $f'(x)$ est déterminé par le signe de $-\sin(x)$

x	0		π		2π		3π		4π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	↘	$f(\pi)$	↗	$f(2\pi)$	↘	$f(3\pi)$	↗	$f(4\pi)$

~~On note que en $x = 0$ et $x = 4\pi$ ne sont pas~~

3) Le maximum absolu est au point $\boxed{x = 0, 2\pi, 4\pi}$

Le minimum absolu est au point $\boxed{x = \pi, 3\pi}$

La fonction est périodique et donc a une infinité de maximums et de minimums globaux.
$\Rightarrow$ Les maximums globaux sont $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow$ Les minimums globaux sont $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

4) On considère la même fonction, mais maintenant définie pour tous les nombres réels. Est-ce que'elle possède un maximum ou minimum absolu? Justifiez votre réponse.

[Indication: L'image de la fonction $\cos(x)$ est $[-1, 1]$. Quelle est l'image de la fonction $\cos(\cos(x))$?]

Les max globaux (absolus) sont : $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Les minimums globaux (absolus) sont : $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Scanned by CamScanner

QUESTION 5. Le système dynamique discret SDD $x_{t+1} = \frac{5x_t}{1+x_t} - hx_t$ donne la dynamique d'un stock de poisson exploité. Le premier terme sur le côté droit est la reproduction nette (Selon une fonction de Beverton Holt) et le second est la récolte. Calculer le(s) point(s) d'équilibre, x^*, de ce SDD. Le rendement à l'quilibre est $Y^* = hx^*$, où x^* est le point d'équilibre positif, et il dépend de h. Trouver la valeur h qui maximise le rendement.

Réponse: La valeur optimale de h est $\boxed{-1+\sqrt{5}}$

Points d'équilibres: $x^* = \frac{5x^*}{1+x^*} - hx^* \Rightarrow x^* = 0$ ~~ou~~ $x^* = \frac{4-h}{1+h}$

Le deuxième point d'équilibre est positif (strictement positif) si $0 < h < 4$

- Le rendement est $Y^* = hx^* = h\left(\frac{4-h}{1+h}\right)$

$$Y^* = \frac{-h^2+4h}{1+h}$$

Alors ~~y~~ $Y^{*\prime} = \frac{dY^*}{dh} = \frac{-h^2-2h+4}{(1+h)^2}$

$Y^{*\prime} = 0 \Longrightarrow -h^2+2h+4 = 0$; donc $h = \frac{-2+\sqrt{4+16}}{2}$ ou $h = \frac{-2-\sqrt{4+16}}{2}$; d'où $h = -1-\sqrt{5}$ ou $h = -1+\sqrt{5}$

Puisque $0 < h < 4$, Le seul point critique est est $h = -1+\sqrt{5} = 1.23$. Ainsi, en $h = 1.23$, ~~p~~our h proche de 1.23 et $h < 1.23$, $Y^{*\prime} > 0$ et pour $h > 1.23$ et h proche de 1.23, $Y^{*\prime} < 0$, alors Y^* a un maximum local et global en ce point.

h	0	$-1+\sqrt{5}$	
$Y^{*\prime}$	$+$	0	$-$
Y^*	$\nearrow$		$\searrow$

Scanned by CamScanner