Université d'Ottawa • University of Ottawa

Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique

Faculty of Science
Mathematics and Statistics

MAT 1741 C – Test 3 – V.B

Professeur : Abdelkrim El basraoui

12 novembre 2015

Nom : Solution

Prénom :

Numéro d'étudiant :

Réponse choix multiples → (1–3)

Pour le correcteur → (4–7)

1	D
2	B
3	E
4	
5	
6	
[Bonus] 7	
Total	

- La durée de cet examen est **80 minutes**.
- Cet examen est à livre fermé et vos notes de cours ne seront pas allouées. L'utilisation de calculatrice, téléphone cellulaire, pagette ou tout autre appareil qui peut transmettre ou stocker de l'information **n'est pas permise.**
- Prenez le temps de lire tout le document avant de commencer et lisez chaque question attentivement. **Répondez à toutes les questions dans l'espace fourni après chaque question**. Pour les questions 4 à 7, vous pouvez utiliser l'endos des pages si vous en avez besoin, par contre n'oubliez pas de l'indiquer pour le correcteur.
- Les questions 1 à 3 sont à choix multiples et valent 1 point chacune. Il n'y aura aucun point partiel. Vous devez écrire votre réponse dans le tableau fourni ci-dessus.
- Les questions 4 et 6 valent 6 points chacune. **Les bonnes réponses pour ces questions doivent être justifiées et écrites de façon logique et lisible; vous devez convaincre le correcteur que vous savez pourquoi votre réponse est la bonne.** La Question 7 est une question bonus qui vaut 3 points.
- Lorsque vous le pouvez, il est fortement recommandé de vérifier votre travail.

Bonne Chance!

1. Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et soit B une matrice de type $3 \times n$. Alors la troisième ligne de la matrice (produit) AB est

A. la même que la deuxième ligne de A
B. la même que la première ligne de B
C. la même que la deuxième ligne de B
D. la somme de la première et deuxième ligne de B
E. la somme de la première et troisième ligne de B
F. la somme de la deuxième et troisième ligne de B

Si $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3n} \end{bmatrix}$

alors : $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & \cdots & b_{3n} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} b_{11}+b_{21} & b_{12}+b_{22} & \cdots & b_{1n}+b_{2n} \\ b_{11}+b_{31} & b_{12}+b_{32} & \cdots & b_{1n}+b_{3n} \\ b_{11}+b_{21} & b_{12}+b_{22} & \cdots & b_{1n}+b_{2n} \end{bmatrix}$

Donc la réponse est : D.

2. Trouvez toutes les valeurs de s pour lesquelles $(1,2,3,s)$ est une combinaison linéaire de $(1,1,-1,0)$, $(1,0,-1,2)$ et $(1,1,1,2)$.

A. $s = 2$ ou 3
B. $s = 2$ seulement
C. $s = 3$ seulement
D. $s = -2$ ou -3
E. $s = 0$ ou 2
F. $s = -2, 0$ ou 3

On trouve la M.E. de la M.A. suivante :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & s \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_1]{L_2 \to L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & s \end{array}\right] \xrightarrow{L_4 \to L_4 + 2L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & s+2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_4 \to L_4 - L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & s-2 \end{array}\right]$$

Donc pour que $(1,2,3,s)$ soit combinaison linéaires des vecteurs $(1,1,-1,0)$, $(1,0,-1,2)$ et $(1,1,1,2)$ il faudra que le système correspondant à la M.A. précédente soit compatible. Alors on doit avoir $s-2=0 \iff \boxed{s=2}$. (B)

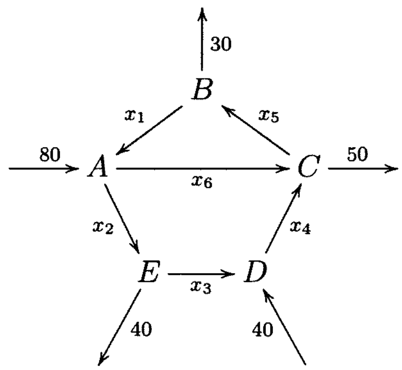
3. Soit A la matrice des coéfficients d'un système linéaire homogène de 12 équations et 22 variables.
Si le rang de A est égale à 8, combien de paramètres y aura-t-il dans la solution générale?

A. 0
B. 4
C. 10
D. 12
E. 14
C. 22

paramètres = # variables − rg(A)

$= 22 - 8 = 14$. (E).

4. Considérez le réseau routier avec intersections A, B, C, D et E ci-bas. Les flêches indiquent la direction du traffic qui se fait en une seule direction. Les chiffres et les variables x_i donnent le nombre de véhicules qui entrent ou sortent par les intersections A, B, C, D et E par minute.



a) Donnez le système linéaire qui représente ce réseau.

Noeud	Flux Entrant	Flux Sortant
A	$x_1 + 80$	$x_2 + x_6$
B	x_5	$x_1 + 30$
C	$x_4 + x_6$	$x_5 + 50$
D	$x_3 + 40$	x_4
E	x_2	$x_3 + 40$
Total	$80 + 40$	$30 + 40 + 50$

Soit le système :

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_6 = 80 \\ x_1 - x_5 = -30 \\ x_4 - x_5 + x_6 = 50 \\ x_3 - x_4 = -40 \\ x_2 - x_3 = 40 \\ 120 = 120 \quad \leftarrow (\text{Total}) \end{cases}$$

b) Si la matrice **échelonnée réduite** de la matrice augmentée du systéme dans la partie (a) est

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -30 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

Les variables de base sont x_1, x_2, x_3 et x_4 et les variables libres sont x_5 et x_6.

écrivez la solution générale du systéme.

La sln générale est donc :

$$\begin{cases} x_1 = x_5 - 30 \\ x_2 = x_5 - x_6 + 50 \\ x_3 = x_5 - x_6 + 10 \\ x_4 = x_5 - x_6 + 50 \\ x_5 \text{ libre} \\ x_6 \text{ libre.} \end{cases}$$

c) Si, dû à des travaux, on ferme la route ED, trouvez le flux minimal le long de la route AC. Justifiez votre réponse.

Si on ferme la route ED alors $x_3 = 0$ et donc

$x_5 - x_6 + 10 = 0 \iff x_6 = x_5 + 10$.

Comme $x_1, x_2, \ldots, x_6 \geq 0$ alors le flux le long AC est minimal quand x_6 est minimal et ceci se réalise quand x_5 est minimal.

Donc sachant que la valeur minimale de x_5 est 30

car $x_1 \geq 0 \iff x_5 - 30 \geq 0 \iff x_5 \geq 30$

et donc la valeur minimal de x_5 est 30.

D'où le flux minimal le long AC est de $x_6 = 30 + 10 = 40$ voitures/minute.

5. Supposons que $e, f \in \mathbb{R}$ et considérons le système linéare en x, y et z suivant:

$$\begin{cases} x - y + ez = f \\ x + y = 1 \\ 3x + y + z = -1 \end{cases}$$

a) Si $[A\,|\,b]$ est la matrice augmentée de ce systéme, trouvez $\mathrm{rg}(A)$ et $\mathrm{rg}([A\,|\,b])$ pour <u>toutes les valeurs</u> de e et f.

On trouve la M.E. de $[A|b]$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & e & f \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_1]{L_2 \to L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & e & f \\ 0 & 2 & -e & 1-f \\ 0 & 4 & 1-3e & -1-3f \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & e & f \\ 0 & 2 & -e & 1-f \\ 0 & 0 & 1-e & -3-f \end{array}\right] \text{ est la M.E.}$$

On a donc : $\mathrm{rg}(A) = 3$ si $1-e \neq 0 \Leftrightarrow e \neq 1$.

$\mathrm{rg}(A) = 2$ si $1-e = 0 \Leftrightarrow e = 1$

$\mathrm{rg}([A|b]) = 3$ si $(1-e \neq 0 \Leftrightarrow e \neq 1)$ et f quelconque.

$\mathrm{rg}([A|b]) = 3$ si $(1-e = 0 \Leftrightarrow e = 1)$ et $(-3-f \neq 0 \Leftrightarrow f \neq -3)$.

$\mathrm{rg}([A|b]) = 2$ si $(1-e = 0 \Leftrightarrow e = 1)$ et $(-3-f = 0 \Leftrightarrow f = -3)$.

(Voir la prochaine page pour Q.4 parties (b) et (c).)

b) En utilisant (a), trouvez toutes les valeurs de e et f tels que le système admet

(i) une solution unique : dans ce cas on doit avoir

$rg([A|b]) = rg(A) = \#$ variables $= 3$.

Ceci arrive quand $\boxed{e \neq 1 \text{ et } f \text{ quelconque.}}$

(ii) une infinité de solutions : dans ce cas : $rg([A|b]) = rg(A)$

et $rg(A) < \#$ variables.

C'est le cas où $rg(A) = rg([A|b]) = 2$.

Donc on doit avoir $\boxed{e = 1 \text{ et } f = -3}$.

(iii) acune solution (incompatible) : c'est le cas où $rg(A) < rg([A|b])$.

Donc on doit avoir $\boxed{e = 1 \text{ et } f \neq -3}$.

c) Dans le cas d'une infinité de solutions (comme dans b)(ii)) donnez une interprétation géométrique de la solution générale.

Quand on a une infinité de solutions ($e=1$ et $f=-3$) on a une variable libre. Donc la sln générale répresente une droite.

6. Indiquer si chacun des énoncés suivants est (toujours) vrai ou est (possiblement) faux, dans la case donnée.

- Si vous indiquez qu'un énoncé est (possiblement) faux, vous devez **donner un contre-exemple!**
- Si vous indiquez que l'énoncé est (toujours) vrai, vous devez expliquer clairement votre raisonnement.

a) Tout système linéaire compatible est homogène.

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$ est compatible mais pas homogène.

RÉPONSE : Faux

b) Si la matrice échelonnée de la matrice des coéfficients d'un système linéaire en deux équations et trois variables a une colonne de zéros, alors ce système admet une infinité de solutions.

La Matrice suivante $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ a une colonne de zéros, mais ~~si~~ augmentée par $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ le système linéaire correspondant serait incompatible.

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

RÉPONSE : Faux

6 (suite).

c) Si A et B sont deux matrices d'ordre 2 telles que $AB = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.

Prendre $A = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

On a : $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$ mais $A \neq 0$

RÉPONSE : Faux

d) Le noyau, Nul(A), de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ est de dimension 2.

$\dim \mathrm{Nul}(A) = \#$ variables libres $= \#$ colonnes $- \mathrm{rg}(A)$

$= 1 = 3 - 2$

RÉPONSE : Faux

7. [Bonus] Supposez que A est une matrice non-nulle d'ordre 3 telle que $A^T = -A$. Montrez que $\mathrm{rg}(A) = 2$.
Vous devez montrez ceci pour toutes les matrices non-nulles d'ordre 2. Un exemple particulier n'est pas suffisant.

Voir l'autre version.