MAT 1730 – Automne 2015 – Devoir 3

À remettre au plus tard le jeudi, 15 octobre, 20h00.

Votre devoir doit être remis à temps et broché sinon il ne sera pas corrigé.

DGD (encercler un seul): 1 (lun 10h) 2 (lun 13h) 3 (mer 11h30)

Nom: Solutions No d'étudiant: ______

QUESTION 1. Utiliser les propriétés vues en classe (pas de table de valeurs ou calculatrice) pour calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\ln(3x^2 - 4x + 2) - \ln(5x^2 + 19x - 1) \right) = \boxed{\ln(3/5)}$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\ln(3x^2-4x+2) - \ln(5x^2+19x-1)\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{3x^2-4x+2}{5x^2+19x-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{3-4/x+2/x^2}{5+19/x-1/x^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(3-4/x-1/x^2)}{\lim\limits_{x\to\infty}(5+19/x-1/x^2)}\right) = \ln(3/5)$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{x/2}}{2^x} = \boxed{0}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x/2}}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{e^{1/2}}{2}\right)^x = 0$$

car $0 < \frac{\sqrt{e}}{2} < 1$ et $\lim\limits_{x\to\infty} r^x = 0$ pour $|r| < 1$.

QUESTION 2. On considére la fonction $f(x) = \frac{|x-1|}{x^2-1}$.

(a) Déterminer $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ en utilisant la suite $x_n = 1 + 1/n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$f(x_n) = \frac{|x_n - 1|}{x_n^2 - 1} = \frac{|(1 + 1/n) - 1|}{(1+1/n)^2 - 1} = \frac{1/n}{2/n + 1/n^2} = \frac{1}{2 + 1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

Réponse: $\boxed{\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1/2}$

(b) Déterminer $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ en utilisant la suite $x_n = 1 - 1/n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$f(x_n) = \frac{|x_n - 1|}{x_n^2 - 1} = \frac{|(1 - 1/n) - 1|}{(1-1/n)^2 - 1} = \frac{1/n}{-2/n + 1/n^2} = \frac{1}{-2 + 1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{1}{2}$$

Réponse: $\boxed{\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1/2}$

(c) La fonction f pourrait-elle être continue en $x = 1$ en définissant $f(1)$ de façon appropriée? Justifier brièvement votre réponse.

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1/2 \neq -\frac{1}{2} = \lim_{x\to 1^-} f(x)$, donc $\lim_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas $\Rightarrow$ on ne peut pas avoir $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ quelle que soit la valeur de $f(1)$.

Réponse: $\boxed{f \text{ ne peut pas être continue en } x = 1}$

(d) Déterminer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ en utilisant la suite $x_n = n + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$f(x_n) = \frac{|x_n - 1|}{x_n^2 - 1} = \frac{|(n+1) - 1|}{(n+1)^2 - 1} = \frac{n}{n^2 + 2n} = \frac{1}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Réponse: $\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0}$

QUESTION 3. Soit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{(x+1)^3}, & x \notin [-1,1] \\ ax + b, & x \in]-1,1[\end{cases}$$

où a, b sont des nombres réels.

(a) Trouver $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \boxed{-\infty}$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{(x-2)(x+1)}{(x+1)^3} = \lim_{x \to -1^-} \frac{x-2}{(x+1)^2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

(b) Trouver $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \boxed{b - a}$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (ax + b) = a \cdot (-1) + b = b - a$$

(c) Y a-t-il des valeurs de a, b qui rendent la fonction f continue en $x = -1$? Si oui, alors donner ces valeurs; si non, alors expliquer pourquoi.

Réponse: Non, aucunes valeurs de a et $b \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \neq b - a = \lim_{x \to -1^+} f(x)$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, donc impossible de rendre $f = f(x)$ continue en $x = -1$.

(d) Trouver $\lim_{x\to 1^+} f(x) =$ $\boxed{-1/4}$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-x-2}{(x+1)^3} = \frac{1-1-2}{(1+1)^3} = \frac{-1}{4}$$

(e) Trouver $\lim_{x\to 1^-} f(x) =$ $\boxed{a+b}$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (ax+b) = a+b$$

(f) Y a-t-il des valeurs de a, b qui rendent la fonction f continue en $x = 1$? Si oui, alors donner ces valeurs; si non, alors expliquer pourquoi.

Réponse: Oui pour $a = -1/4 - b$, $b \in \mathbb{R}$ quelconque

On doit avoir $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

$$\Rightarrow \quad a+b = \frac{-1}{4} \iff a = -\frac{1}{4} - b, \; b \in \mathbb{R} \text{ quelc.}$$