MAT 1739 A & C : CALCUL ET VECTEURS
DEVOIR 2 ÉCHÉANCE : AVANT 15H, LE MERCREDI 30 NOVEMBRE.

Professors : Cheikh Becaye Ndongo et Termeh Kousha
Soumettre le devoir dans la boîte pour devoirs au 585 King Edward (département de mathématiques).
Aucun devoir ne sera accepté en retard.

Nom: ______________________________
No d'étudiant: _________________________

1. Soit $\vec{u} = [2,3]$ and $\vec{v} = [7,-2]$, calculer

a) $6\vec{u} - 2\vec{v}$

Solution (1a) (5 points): $6\vec{u}-2\vec{v} = 6[2,3]-2[7,-2] = [12,18]-[14,-4] = [-2,22]$. $\boxed{6\vec{u} - 2\vec{v} = [-2,22]}$.

b) $\|2\vec{u} + 3\vec{v}\|$

Solution (1b) (5 points): $\|2\vec{u} + 3\vec{v}\| = \|2[2,3] + 3[7,-2]\| = \|[4,6] + [21,-6]\| = \|[25,0]\| = 25$.

$\boxed{\|2\vec{u} + 3\vec{v}\| = 25}$.

c) $\|2\vec{u}\| + \|3\vec{v}\|$

Solution (1c) (5 points):

$\|2\vec{u}\| + \|3\vec{v}\| = \|2[2,3]\| + \|3[7,-2]\| = \|[4,6]\| + \|[21,-6]\|$

$= \sqrt{4^2+6^2} + \sqrt{21^2+6^2} = 2\sqrt{13} + 3\sqrt{53}$.

$\boxed{\|2\vec{u}\| + \|3\vec{v}\| = 2\sqrt{13} + 3\sqrt{53}}$.

d) $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v})$

Solution (1d) (5 points):

$(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v}) = (2[2,3] + 3[7,-2]) \cdot (3[2,3] - 2[7,-2])$

$= ([4,6] + [21,-6]) \cdot ([6,9] - [14,-4]) = ([25,0]) \cdot ([-8,13]) = -200$.

$\boxed{(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v}) = -200}$.

2. Soit $\vec{u} = [2, -3]$ and $\vec{v} = [5, 4]$.

a) Trouver l'angle entre $\vec{u}$ and $\vec{v}$.

Solution (2a) (5 points):
$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{10-12}{\sqrt{2^2+3^2}\sqrt{5^2+4^2}} == \frac{-2}{\sqrt{13}\sqrt{41}} = \frac{-2}{\sqrt{533}} \approx -0.08662.$
D'où $\theta = \arccos(-\frac{2}{\sqrt{533}})$ ou $\theta = \cos^{-1}(-\frac{2}{\sqrt{533}}) \approx 1.6575$ radians.
$\theta = \cos^{-1}(-\frac{2}{\sqrt{533}}) \approx 1.6575 \cdot 180/\pi$ degrées
$\boxed{\theta = \cos^{-1}(-\frac{2}{\sqrt{533}}) \approx 94.97 \text{ degrées}}$.

b) Trouver l'angle entre $3\vec{u}$ and $-4\vec{v}$.

Solution (2b) (5 points): Puisque $3\vec{u}$ a la même direction que $\vec{u}$ et $-4\vec{v}$ a la direction opposé à $\vec{v}$, $\boxed{\text{l'angle entre } 3\vec{u} \text{ et } -4\vec{v} \text{ est } \pi - \arccos(-\frac{2}{\sqrt{533}}) \text{ radians}}$ ou $\boxed{\text{l'angle entre } 3\vec{u} \text{ et } -4\vec{v} \text{ est } \approx 180° - 94.97° = 85.03°}$.

c) Trouver la projection de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$.

Solution (2c) (5 points): $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)\vec{v} = \frac{-2}{5^2+4^2}[5, 4] = \frac{-2}{41}[5, 4] = [-\frac{10}{41}, -\frac{8}{41}]$.
$\boxed{\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = [-\frac{10}{41}, -\frac{8}{41}]}$.

d) Trouver la projection de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$.

Solution (2d) (5 points): $\operatorname{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u} = \frac{-2}{2^2+3^2}[2, -3] = \frac{-2}{13}[2, -3] = [-\frac{4}{13}, \frac{6}{13}]$.
$\boxed{\operatorname{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = [-\frac{4}{13}, \frac{6}{13}]}$.

3. Soit $\vec{u} = [-3, 2, 1]$ et $\vec{v} = [3, 4, 5]$.

a) Trouver $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Solution (3a) (5 points): $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = -9 + 8 + 5 = 4}$.

b) Trouver $\vec{v} \cdot \vec{u}$

Solution (3b) (5 points): $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} = 4}$.

c) Trouver $\vec{u} \times \vec{v}$

Solution (3c) (5 points):
$\vec{u} \times \vec{v} = [u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1] = [2 \cdot 5 - 1 \cdot 4, 1 \cdot 3 - (-3) \cdot 5, -3 \cdot 4 - 2 \cdot 3]$
$= [6, 18, -18]$.
$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = [6, 18, -18]}$.

d) Trouver $\vec{v} \times \vec{u}$

Solution (3d) (5 points):
$\boxed{\vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v} = [-6, -18, 18]}$.

4.Soit $\vec{u} = [3, -2, 6]$ et $\vec{v} = [2, 4, 7]$.

a) Trouver deux vecteurs unitaires colinéaire à $\vec{u}$.

$\boxed{\textbf{Solution (4a) (5 points):}}$ $\pm\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u} = \pm\frac{1}{\sqrt{2^6+6^2+(-3)^2}}[2, 6, -3] = \pm\frac{1}{7}[2, 6, -3] = \pm[\frac{2}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{3}{7}]$.

b) Trouver deux vecteurs unitaires orthogonaux aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\boxed{\textbf{Solution (4b) (5 points):}}$ On sait que le vecteur $\vec{u}\times\vec{v}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\vec{u} \times \vec{v} = [u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1] = [-2 \cdot 7 - 6 \cdot 4, 6 \cdot 2 - 3 \cdot 7, 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 2]$
$= [-38, -9, 16]$.

Ainsi, $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{38^2 + 9^2 + 16^2} = \sqrt{1781}$.
D'où les deux vecteurs unitaires orthogonaux aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont

$$\pm\frac{1}{\sqrt{1781}}[-38, -9, 16] = \left[-\frac{38}{1781}, -\frac{9}{1781}, \frac{16}{1781}\right]$$

$\boxed{\text{les deux vecteurs unitaires demandés sont } \left[-\frac{38}{1781}, -\frac{9}{1781}, \frac{16}{1781}\right]}$.

$$[30, -29, -38] = \pm[\frac{30}{\sqrt{3185}}, -\frac{29}{\sqrt{3185}}, -\frac{38}{\sqrt{3185}}].$$

c) Trouver la surface du parallélogramme défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\boxed{\textbf{Solution (4c) (5 points):}}$

$\boxed{\text{La surface du parallélogramme défini par } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ est } |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{1781}}$.

d) Trouver l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\boxed{\textbf{Solution (4d) (5 points):}}$

$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{40}{7\sqrt{69}}$, d'où $\theta = \arccos(\frac{40}{7\sqrt{69}}) \approx 0.81217$ radians
ou $\theta \approx 0.81217 \cdot 180/\pi$ degrées
ou $\boxed{\text{l'angle entre } \vec{u} \text{ et } \vec{v} = \theta \approx 46.5°}$.

5. Indiquez si l'énoncé est vrai ou faux. Justifiez votre réponse.

a) Si $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, alors $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ et $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$.

Solution (5a) (5 points): Vrai. Parce que le vecteur $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, d'où on a $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ et $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$.

b) Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, alors $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \operatorname{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$.

Solution (5b) (5 points): Vrai. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux l'un à l'autre. D'où $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \operatorname{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \vec{0}$.

c) Si $|\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}| = |\operatorname{proj}_{\vec{u}} \vec{v}|$, alors $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

Solution (5c) (5 points): Faux. Par exemple, posons $\vec{u} = [2, 0]$ et $\vec{v} = [0, 1]$. Alors $|\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}| = |\operatorname{proj}_{\vec{u}} \vec{v}| = 0$, mais $|\vec{u}| \neq |\vec{v}|$.

d) $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$.

Solution (5d) (5 points): Vrai. Soit θ l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors $|\cos\theta| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$. Puisque $\cos\theta \leq 1$, on a $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$.