Version 1.

Inscrivez vos réponses pour les questions à choix multiples dans ce tableau.

Question 1	Question 2
F	C

Ne rien inscrire dans le tableau suivant.

Total QCM	Question 3	Question 4	Question 5	Question 6	Total sur 20

1. Considérez un système d'équations linéaires homogène avec 2016 équations et 2000 variables. Lequel des énoncés suivants est vrai pour ce système ?

A. Le système peut être incompatible. Faux, il est toujours compatible.

B. Le système ne peut jamais avoir une infinité de solutions. Faux, on a une infinité de sols si # variables > # pivots.

C. Le système a entre 1 et 2000 solutions. Faux, ou bien on une infinité de sols ou bien une sln unique

D. Le système a toujours une infinité de solutions. Faux, si # pivots = # variables on a une sln unique

E. Le système a toujours une unique solution. Faux, (voir B).

$\boxed{\text{F.}}$ Le système possède soit seulement la solution triviale, soit une infinité de solutions. Vrai.

2. Trouvez la valeur de t pour laquelle $(1;3;t)$ est contenu dans $\mathcal{L}((0;1;-1);(1;1;2))$:

On forme la M.A. suivante

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & t \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & t \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 + L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & t+3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & t \end{array}\right].$$

Le syst. correspondant est compatible si et seulement si $t = 0$.

A. -2
B. -1
$\boxed{\text{C. 0}}$
D. 1
E. 2
F. 7

3. Soient les paramètres p et q dans $\mathbb{R}$ et soit le système d'équations linéaires à trois variables, x; y et z, suivant :

$$\begin{cases} x - z = 2 \\ -x + y + z = p \\ x + 2y + pz = 2p + q \end{cases}$$

a) Si $[A|b]$ est la matrice augmentée du système ci-dessus, trouvez $rg(A)$ et $rg([A|b])$ pour toutes valeurs de p et q. On trouve la "M.E." de $[A|b]$

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & p \\ 1 & 2 & p & 2p+q \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & p+2 \\ 0 & 2 & p+1 & 2p+q-2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & p+2 \\ 0 & 0 & p+1 & q-6 \end{array}\right].$$ Donc on a :

- $rg(A) = 3$ si $p+1 \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{p \neq -1}$.
- $rg(A) = 2$ si $p+1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{p = -1}$
- $rg([A|b]) = 3$ si $(p+1 \neq 0 \Leftrightarrow \underline{p \neq -1})$ et $\underline{q \text{ quelconque}}$.
- $rg([A|b]) = 3$ si $(p+1 = 0 \Leftrightarrow \underline{p = -1})$ et $(q-6 \neq 0 \Leftrightarrow \underline{q \neq 6})$
- $rg([A|b]) = 2$ si $(p+1 = 0 \Leftrightarrow \underline{p = -1})$ et $(q-6 = 0 \Leftrightarrow \underline{q = 6})$

(Voir la page suivante pour les questions (3b) et (3c) ...)

3 (suite).

b) En utilisant votre réponse en a), trouvez toutes les valeurs de p et q telles que le système possède

(i) une solution unique. $\Rightarrow$ $rg(A) = rg([A|b]) = \#\text{ variables} = 3$.

$\Rightarrow$ $p \neq -1$ et q quelconque.

(ii) une infinité de solutions, $\Rightarrow$ $\underset{\overset{\|}{2}}{rg(A)}$ ... $\overset{2}{\overset{\|}{rg(A)}} = rg([A|b]) < \#\text{ variables}$

$\Rightarrow$ $p = -1$ et $q = 6$

(iii) aucune solution. $\Rightarrow$ $\overset{2}{\overset{\|}{rg(A)}} < rg([A|b]) = 3$

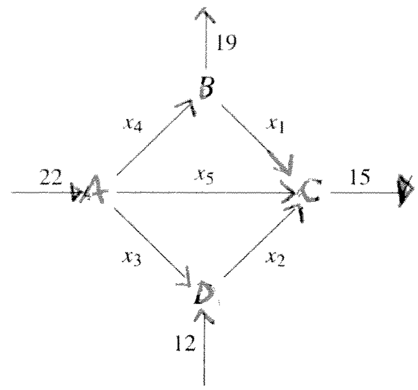
$\Rightarrow$ $p = -1$ et $q \neq 6$

c) Dans le cas (3b) (ii), donnez une description géométrique complète de l'ensemble des solutions. Dans ce cas on a : $[A|b] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

Donc la s^{on} générale sous forme paramétrique vectorielle est $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z+2 \\ 1 \\ z \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $z = s \in \mathbb{R}$

Donc c'est une droite passant par le p^{t} $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et dirigée par $\vec{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. Soit le réseau routier avec les intersections A, B, C et D ci-dessous. Les flèches indiquent le sens du traffic qui se fait en **sens unique**. Les nombres représentent le nombre **exact** de voitures qui entrent ou qui sortent de A, B, C et D pendant une minute. Chaque variable x_i représente un nombre inconnu de voitures qui passent le long d'un segment de route pendant cette même période.



a) Écrivez le système d'équations linéaires qui représente ce réseau, et donnez **toutes les contraintes sur les variables** x_i, $i = 1;2;::::;5$.

(Ne pas résoudre ce système.)

	Flux Entrant	Flux sortant
A	22	$x_3+x_4+x_5$
B	x_4	$19+x_1$
C	$x_1+x_2+x_5$	15
D	x_3+12	x_2
Total	$22+12$	$15+19$

Soit le système

$$\begin{cases} x_3+x_4+x_5 = 22 \\ -x_1+x_4 = 19 \\ x_1+x_2+x_5 = 15 \\ x_2-x_3 = 12 \\ (34 = 34) \text{ (qu'on peut ignorer)} \end{cases}$$

avec contraintes $x_i \geq 0$, $(x_i \in \mathbb{Z})$, $i = 1,2,3,4,5$.

(Les questions (4b) et (4c) sont à la page suivante...)

4 (suite).

b) La matrice échelonnée réduite de la matrice augmentée correspondante au système en a) est

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 34 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Écrivez la solution générale sous forme paramétrique vectorielle. (Ignorez les contraintes données en a) pour l'instant.) On a si on pose $x_4 = s$, $x_5 = t$

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = -19 \\ x_2 + x_4 + x_5 = 34 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 22 \\ x_4 \text{ libre} \\ x_5 \text{ libre} \end{cases} \Longrightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -19 \\ 34 \\ 22 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

c) Si $\overline{AC}$ est fermée, **en utilisant votre réponse à b) et les contraintes**, trouvez

(i) Le flux maximal le long du segment $\overline{DC}$, et

(ii) Le flux minimal le long du segment $\overline{DC}$.

(Justifiez vos réponses.) Si on ferme $\overline{AC}$ alors $x_5 = 0 = t$.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{De } x_2 = 34 - x_4 \geq 0 & \text{on a :} & x_4 \leq 34. \\ \text{De } x_1 = x_4 - 19 \geq 0 & \text{on a :} & x_4 \geq 19 \\ \text{De } x_3 = 22 - x_4 \geq 0 & \text{on a :} & x_4 \leq 22. \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{19 \leq x_4 \leq 22}$$

Maintenant, le long de $\overline{DC}$ circule $x_2 = 34 - x_4$ voitures par minute.

i/ Donc x_2 est maximal quand x_4 est minimal, c'est-à-dire $x_4 = 19$.

$\Rightarrow x_2 = 34 - 19 = \boxed{15}$ est le flux maximal le long $\overline{DC}$.

ii/ Aussi x_2 est minimal quand x_4 est maximal, c'est-à-dire $x_4 = 22$.

$\Rightarrow x_2 = 22 - 19 = \boxed{3}$ est le flux minimal le long $\overline{DC}$.

5. Indiquez si chacun des énoncés suivants est (toujours) vrai ou est (possiblement) faux, dans la case spécifiée.

- Si vous indiquez qu'un énoncé est (possiblement) faux, vous devez **donner un contre-exemple explicite.** Vous pouvez utiliser un exemple soit numérique, soit avec des matrices, soit avec des fonctions !
- Si vous indiquez que l'énoncé est (toujours) vrai, vous devez expliquer clairement votre raisonnement.

a) Si X est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{2016}$, tel que $X \neq \{0\}$ et $X \neq \mathbb{R}^{2016}$, alors $1 \leq \dim X \leq 2016$.

X s-es de $\mathbb{R}^{2016} \Longrightarrow \dim X \leq 2016$. (En fait, $X \neq \mathbb{R}^{2016} \Longrightarrow \dim X < 2016$).

$X \neq \{0\} \Longrightarrow \dim X > 0$ soit $\dim X \geq 1$.

RÉPONSE : Vrai

b) Soient $m > 1$ et $p > 1$. Si A est une matrice de type $m \times p$ avec une ligne complète de zéros, alors $rg(A) < p$.

$rg(A) = \#$ pivots $< \#$ maximal de pivots $= \mathrm{Min}(m, p-1)$

si on a une ligne de zéros.

Mais $\mathrm{Min}(m, p-1) \leq p-1 < p$.

$\Longrightarrow \underline{\underline{rg(A) < p}}$.

RÉPONSE : Vrai

5 (suite).

c) Si la matrice des coefficients d'un système d'équations linéaires à deux équations et trois variables possède une colonne complète de zéros, alors ce système possède une infinité de solutions.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est la M.C. du syst. incompatible

$A\vec{x} = \vec{b}$, où $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow (1 = 0)$ impossible.

RÉPONSE : Faux

d) Les coordonnées de $(1;1) \in \mathbb{R}^2$ par rapport à la base $\{(1;1);(2;1)\}$ sont $(1;1)$.

On a: $(1)(1,1) + (1)(2,1) = (3,2) \neq (1,1)$.

(Si (a,b) sont les coords de $(1,1)$ par rapport à la base $\{(1,1),(2,1)\}$ alors de $a(1,1) + b(2,1) = (1,1)$ on forme $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to -L_2}$

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - 2L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ et donc $a = 1$, $b = 0$.

(qu'on peut déduire directement puisque $(1,1)$ est un élément de la base)).

RÉPONSE : Faux.

Question 6. [Bonus / Défi] Si A et B sont des matrices 3×3 telles que $B \neq 0$ et $AB = 0$, alors montrez que $rg(A) < 3$.

(Votre preuve doit être valide **pour tout** choix de matrices A et B de type 3×3 telles que $B \neq 0$ et $AB = 0$.)

Si $rg(A) = 3$ alors l'éq. $A\vec{x} = \vec{0}$ n'admet que (*) la sln triviale $\vec{x} = \vec{0}$.

Maintenant, si $B = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$ alors l'un des vecteurs $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ est non nul.

Aussi, de $AB = \begin{bmatrix} | & | & | \\ A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & A\vec{b}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \mathbb{O}$

$\Rightarrow \begin{cases} A\vec{b}_1 = \vec{0} \\ A\vec{b}_2 = \vec{0} \\ A\vec{b}_3 = \vec{0} \end{cases}$ et $\xRightarrow{\text{si } rg(A)=3}$ $\vec{b}_1 = \vec{b}_2 = \vec{b}_3 = \vec{0}$ (d'après (*)).

ce qui est absurde.

D'où $\boxed{rg(A) < 3}$

Version 2.

Inscrivez vos réponses pour les questions à choix multiples dans ce tableau.

Question 1	Question 2
B	A

Ne rien inscrire dans le tableau suivant.

Total QCM	Question 3	Question 4	Question 5	Question 6	Total sur 20

1. Soit un système d'équations linéaires homogène avec 301 équations et 289 variables. Répondez aux questions suivantes (**en ordre**) :

- Est-ce que le système peut avoir une infinité de solutions ? oui, on peut avoir des variables libres
- Est-ce que le système peut avoir une unique solution ? oui, si on : 289 pivots = # variables = rang(M.C.).
- Est-ce que le système peut être incompatible ?

Non, car le système est homogène.

A. Non, non, oui

$\boxed{\text{B. Oui, oui, non}}$

C. Oui, non, oui

D. Oui, non, non

E. Oui, oui, oui

F. Non, non, non

2. Trouvez la valeur de t pour laquelle $(t;5;1)$ est contenu dans $\mathcal{L}((-1;1;0);(2;1;1))$:

$\boxed{\text{A. -2}}$

B. -1

C. 0

D. 1

E. 2

F. 7

On forme la M.A. suivante : $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & t \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 + L_1} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & t \\ 0 & 3 & 5+t \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & t \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5+t \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_2} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & t \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2+t \end{array}\right]$. Le syst. (dont la M.A.) est compatible si et seulement si $2+t=0 \Leftrightarrow \boxed{t=-2}$

3. Soient les paramètres p et q dans $\mathbb{R}$ et soit le système d'équations linéaires à trois variables, x; y et z, suivant :

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ -x + y + z = p \\ x + 2y + pz = 2p + q \end{cases}$$

a) Si $[A|b]$ est la matrice augmentée du système ci-dessus, trouvez $rg(A)$ et $rg([A|b])$ pour <u>toutes</u> valeurs de p et q. On échelonne :

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & p \\ 1 & 2 & p & 2p+q \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & p+1 \\ 0 & 2 & p+1 & 2p+q+1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & p+1 \\ 0 & 0 & p+1 & q-1 \end{array}\right] \text{ est la "M.E".}$$

Donc :

- $rg(A) = 3$ si $p+1 \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{p \neq -1}$
- $rg(A) = 2$ si $p+1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{p = -1}$
- $rg([A|b]) = 3$ si $(p+1 \neq 0 \Leftrightarrow \underline{p \neq -1})$ et $\underline{q \text{ quelconque}}$.
- $rg([A|b]) = 2$ si $\left(\begin{array}{l} p+1 = 0 \text{ et } q-1 = 0 \\ \Leftrightarrow \underline{p = -1} \text{ et } \underline{q = 1} \end{array}\right)$.
- $rg([A|b]) = 3$ si $(p+1 = 0 \Leftrightarrow \underline{p = -1})$ et $(q-1 \neq 0 \Leftrightarrow \underline{q \neq 1})$

(Voir la page suivante pour les questions (3b) et (3c) ...)

3 (suite).

b) En utilisant votre réponse en a), trouvez toutes les valeurs de p et q telles que le système possède

(i) une solution unique, $\Rightarrow$ $rg(A) = rg([A|b]) = \#\text{variables} = 3$

$\Rightarrow$ $\boxed{p \neq -1 \text{ et } q \text{ quelconque}}$.

(ii) une infinité de solutions, $\Rightarrow$ $\overset{2}{rg(A)} = rg([A|b]) < \#\text{variables}$

$\Rightarrow$ $\boxed{p = -1 \text{ et } q = 1}$. (Au moins une variable libre)

(iii) aucune solutions. $\Rightarrow$ $rg(A) < rg([A|b])$. Ceci arrive quand $rg(A) = 2 < rg([A|b]) = 3$.

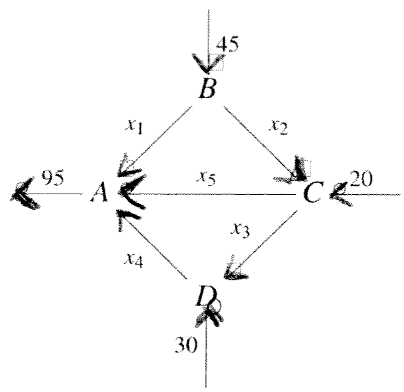
$\Rightarrow$ $\boxed{p = -1 \text{ et } q \neq 1}$

c) Dans le cas b) (ii), donnez une description géométrique complète de l'ensemble des solutions.

Dans ce cas $[A|b] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Donc la s$^{\text{ln}}$ générale sous forme paramétrique vectorielle est : $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, où $z = s \in \mathbb{R}$.

Donc c'est une droite passant par le p$^{\text{t}}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et dirigée par $\vec{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. Soit le réseau routier avec les intersections A, B, C et D ci-dessous. Les flèches indiquent le sens du traffic qui se fait en **une seule direction**. Les nombres représentent le nombre **exact** de voitures qui entrent ou qui sortent de A, B, C et D pendant une minute. Chaque variable x_i représente un nombre inconnu de voitures qui passent le long d'un segment de route pendant cette même période.



a) Écrivez le système d'équations linéaires qui représente ce réseau, et donnez **toutes les contraintes sur les variables** x_i, $i = 1;2;:::;5$.

(Ne pas résoudre ce système.)

	Flux entrant	Flux sortant
A	$x_1+x_4+x_5$	95
B	45	x_1+x_2
C	x_2+20	x_3+x_5
D	x_3+30	x_4
Total	$30+20+45$	95

Donc on a le syst. linéaire

$$\begin{cases} x_1+x_4+x_5=95 \\ x_1+x_2=45 \\ -x_2+x_3+x_5=20 \\ -x_3+x_4=30 \\ 95=95 \leftarrow \text{(qu'on peut ignorer)}. \end{cases}$$

Les contraintes sont : $x_i \geq 0$, $(x_i \in \mathbb{Z})$, $i=1,2,3,4,5$.

(Les questions 4b et 4c sont à la page suivante...)

4 (suite).

b) La matrice échelonnée réduite de la matrice augmentée correspondante au système en a) est

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 95 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -50 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Écrivez la solution générale sous forme paramétrique vectorielle. (Ignorez les contraintes données en a) pour l'instant.) On a :

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 = 95 \\ x_2 - x_4 - x_5 = -50 \\ x_3 - x_4 = -30 \\ x_4 \text{ libre} \\ x_5 \text{ libre} \end{cases}$$

Si on pose $x_4 = s$, $x_5 = t$

$$\Longleftrightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 95 \\ -50 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Si $\overline{AC}$ est fermée, **en utilisant votre réponse à b) et les contraintes**, trouvez

(i) Le flux maximal le long du segment $\overline{DC}$, et

(ii) Le flux minimal le long du segment $\overline{DC}$.

(Justifiez vos réponses.) Si on ferme $\overline{AC}$ alors $x_5 = 0 = t$.

De $x_1 = 95 - x_4 \geq 0$ on a : $x_4 \leq 95$

De $x_2 = x_4 - 50 \geq 0$ on a : $x_4 \geq 50$

De $x_3 = x_4 - 30 \geq 0$ on a : $x_4 \geq 30$

$\Longrightarrow \boxed{30 \leq x_4 \leq 95}$

Maintenant, le long de $\overline{DC}$ circule $x_3 = x_4 - 30$ voitures par minute.

i/ Donc x_3 est maximal quand x_4 l'est aussi, c'est-à-dire $x_4 = 95$

$\Longrightarrow x_3 = 95 - 30 = \boxed{65}$ est le flux maximal le long de $\overline{DC}$.

ii/ Aussi x_3 est minimal quand x_4 l'est aussi, c'est-à-dire $x_4 = 30$.

$\Longrightarrow x_3 = 30 - 30 = \boxed{0}$ est le flux minimal le long de $\overline{DC}$.

5. Indiquez si chacun des énoncés suivants est (toujours) vrai ou est (possiblement) faux, dans la case spécifiée.

- Si vous indiquez qu'un énoncé est (possiblement) faux, vous devez **donner un contre-exemple explicite.** Vous pouvez utiliser un exemple soit numérique, soit avec des matrices, soit avec des fonctions !
- Si vous indiquez que l'énoncé est (toujours) vrai, vous devez expliquer clairement votre raisonnement.

a) Si X est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{2016}$, tel que $X \neq \{0\}$ et X possède un ensemble générateur de 1000 vecteurs, alors $1 \leq \dim X \leq 1000$.

X sous espace de $\mathbb{R}^{2016}$ avec 1000 vecteurs générateurs

$\Longrightarrow$ $\dim X \leq 1000$

$X \neq \{0\} \Longrightarrow \dim X > 0 \Longleftrightarrow \dim X \geq 1$.

RÉPONSE : Vrai

b) Soient $m > 1$ et $p > 1$. Si A est une matrice de type $m \times p$ avec une colonne complète de zéros, alors $rg(A) < p$.

$rg(A) = \#$ pivots $\leq \#$ maximal de pivot $= \text{Min}(m, p-1)$

Si on a une colonne de zéros.

Mais $\text{Min}(m, p-1) \leq p-1 < p$

$\Longrightarrow \underline{\underline{rg(A) < p}}$

RÉPONSE : Vrai

5 (suite).

c) Si la matrice des coefficients d'un système d'équations linéaires à trois équations et deux variables possède une ligne complète de zéros, alors ce système possède une infinité de solutions.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est la matrice des coefficients du système incompatible $A\vec{x} = \vec{b}$, où $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$[A|\vec{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Big\} \longrightarrow \boxed{0 = 1}$ (impossible)

RÉPONSE : Faux.

d) Les coordonnées de $(3;5) \in \mathbb{R}^2$ par rapport à la base $\{(1;1);(1;2)\}$ sont $(1;1)$.

$(1)(1,1) + (1)(1,2) = (2,3) \neq (3,5)$

(Si (a,b) sont les coordonnées de $(3,5)$ dans la base $\{(1,1),(1,2)\}$

$\left\{ \begin{array}{l} a(1,1)+b(1,2) \\ = (3,5) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$

et donc $a = 1$, $b = 2$.).

RÉPONSE : Faux.

Question 6. [Bonus / Défi] Si A et B sont des matrices 3×3 telles que $B \neq 0$ et $AB = 0$, alors montrez que $rg(A) < 3$.

(Votre preuve doit être valide **pour tout** choix de matrices A et B de type 3×3 telles que $B \neq 0$ et $AB = 0$.)

Voir version 1.