Université d'Ottawa
Département de Mathématiques et de Statistiques
MAT 1700 A- Méthodes Mathématiques I
Professeur : M'Hammed Mountassir

Examen partiel I – V-1

13/10/2015

(Version 1)

Nom :........ Solutionnaire ....

Numéro d'étudiant :........

Instructions: (Lisez-les attentivement S.V.P.)

- Écrivez votre nom et numéro d'étudiant dans la première page dans l'espace précisé.
- La durée de cet examen est de **80 minutes**.
- Cet examen est un examen à livre fermé qui comporte **8 questions**.
- Vous devez justifier vos réponses.
- Vous avez une page supplémentaire à la fin que vous pouvez utiliser comme feuilles de brouillon.
- Les calculatrices ne sont pas permises.
- **Ne pas détacher ce livret.**

BONNE CHANCE!!!

Note Totale **sur 45**	

Question 1: [5pts]

Trouvez les asymptotes horizontales et verticales de la fonction suivante, si elles existent (inscrivez vos réponses en bas):

$$f(x) = \frac{5x-15}{x^2-9}$$

les asymptotes horizontales

À droite

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x-15}{x^2-9} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(5-\frac{15}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5-\frac{15}{x}}{x\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{+\infty} = 0$$

À gauche

$$L_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x-15}{x^2-9} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5-\frac{15}{x}}{x\left(1-\frac{9}{x^2}\right)} = \frac{5}{-\infty} = 0$$

donc la droite $y = 0$ est une A. H (à droite et à gauche)

les asymptotes verticales

$x = 3$ ou $x = -3$ sont des asymptotes verticales éventuelles.

$x = 3$

$$L = \lim_{x\to3} \frac{5x-15}{x^2-9} = \lim_{x\to3} \frac{5(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to3} \frac{5}{x+3} = \frac{5}{6}$$

donc $x = 3$ n'est pas une A.V

$x = -3$

$$L = \lim_{x\to-3} \frac{5x-15}{x^2-9} = \lim_{x\to-3} \frac{5}{x+3} = \pm\infty \Rightarrow x = -3 \text{ est une A.V}$$

Asymptote horizontale: $y = 0$. (2 points)

Asymptote verticale:

$x = -3$ (3 points)

Question 2: [5pts]

Une petite entreprise achète une pièce d'équipment pour 65 000 $ et estime que sa durée de vie sera de 10 ans, après lesquels elle aura une valeur de 15 000 $.

(a) Donnez la formule pour la valeur de la pièce après t années, $V(t)$.

le modèle est linéaire donc

$y = mt + b$ avec $m = \frac{V(0) - V(10)}{0 - 10} = \frac{65000 - 15000}{-10} = -5000$

d'où $\boxed{y = -5000t + 65000}$

$\boxed{v(t) = 65000 - 5000t}$ (2 points)

(b) Quelle est la valeur de la pièce après 5 ans ?

après 5 ans

$v(5) = 65000 - (5000)(5) = 40000$ \$ (1 point)

(c) Quand est-ce que cette pièce aura une valeur de 35 000 $?

On cherche t tel que $V(t) = 35000$ \$

$\Rightarrow v(t) = 65000 - 5000t = 35000 \Rightarrow 5000t = 3000$ (1 point)

d'où $t = 6$ ans

(d) Quel est le taux de dépréciation ?

le taux de dépréciation $= -5000$ \$/année

(1 point)

Question 3: [9pts]

Évaluez les limites suivantes:

a) $\lim_{x\to 4} \frac{2x-8}{x^2-16}$.

$L = \lim_{x\to 4} \frac{2x-8}{x^2-16} = \frac{0}{0}$ (F. ind)

$L = \lim_{x\to 4} \frac{2(x-4)}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x\to 4} \frac{2}{x+4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

(3 points)

b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2+6x+7}{-4x^2+1}$.

$L = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2+6x+7}{-4x^2+1} = \frac{\infty}{\infty}$ (F. ind)

$L = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2\left(2+\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}{x^2\left(-4+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2+\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}}{-4+\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

(3 points)

c) $\lim_{x\to 0} \frac{-5x^5}{x^6}$. $= \frac{\infty}{\infty}$ (F. ind)

$L_1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{-5x^5}{x^6} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{5}{x} = -\frac{5}{0^+} = \underline{-\infty}$

$L_2 = \lim_{x\to 0^-} -\frac{5x^5}{x^6} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{5}{x} = -\frac{5}{0^-} = \underline{+\infty}$

(3 points)

Question 4: [6pts]
Soit

$$f(x) = \begin{cases} -3x+2 & \text{si } x < -1 \\ 8 & \text{si } x = -1 \\ -4x & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

(1 point)

(a) Donnez $f(-1)$. $= 8$

(b) Calculez $\lim_{x \to -1} f(x)$, si elle existe.

$L_1 = \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (-4x) = 4$

$L_2 = \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (-3x+2) = 5$

$L_1 \neq L_2$ donc $L = \lim_{x \to -1} f(x)$ n'existe pas.

(3 points)

(c) Est-ce que $f(x)$ est continue? Justifiez votre réponse.

(2 points)

f est non continue en $\underline{-1}$; car elle n'admet pas de limite en ce point.

Question 5: [4pts]
Trouvez l'inverse de la fonction suivante:

$$f(x) = \frac{2x-1}{3x-1} .$$

$y = \frac{2x-1}{3x-1} \Rightarrow (3x-1)y = 2x-1$

d'où $3xy - y = 2x - 1$

$\Rightarrow 3xy - 2x = -1 + y \Rightarrow x(3y-2) = -1+y$

$\Rightarrow x = \frac{-1+y}{3y-2}$ donc $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{-1+x}{3x-2}}$ (4 points).

(si l'étudiant(e) donne cela ; c'est correct)

Question 6: [5pts]
Résolvez l'équation suivante:

$$\ln(x+1) + \ln(x-3) = \ln(5).$$

$x > -1$ et $x > 3$ donc Domaine de cette équation est $]3 ; +\infty[$

$(x+1)(x-3) = 5 \Rightarrow x^2 - 3x + x - 3 = 5$

$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0$

les solutions sont $x = 4$ ou $x = -2$

or $x = -2$ n'est pas dans le domaine donc la seule solution de cette équation est $\boxed{x = 4}$

(si l'étudiant(e) donne les formules quadratiques c'est correct)

Question 7: [6pts]

a) La fabrication d'un verre en cristal nécessite un investissement initial de 1 980 \$ pour le temps au four et ensuite 1.80 \$ pour chaque ~~vert~~ verre fabriqué. Nous vendons les verres pour 9 \$ chacun. Quel est le seuil de rentabilité?

x = le nombre de verres

Coût $(x) = 1980 + 1,8x$ et Revenu $(x) = 9x$.

On atteint le seuil de rentabilité lorsque

Coût (x) = Revenu (x)

donc $1980 + 1,8x = 9x \Rightarrow 7,2x = 1980$

donc $x = \frac{1980}{7,2}$ (réponse acceptée)

(3 points)

$x = 275$ unités

b) Si maintenant les fonctions **demande** et **offre** (en milliers de ~~verts~~ verres) sont données respectivement par

$$D(p) = -3p^2 + 66p \qquad \text{et} \qquad S(p) = 21p + 150\,,$$

où p est le prix par unité produite, trouvez le(s) prix d'équilibre.

les prix d'équilibre

$D(p) = S(p) \Rightarrow -3p^2 + 66p = 21p + 150$

ou $3p^2 - 45p + 150 = 0$

ou $p^2 - 15p + 50 = 0 \Rightarrow (p-5)(p-10) = 0$

d'où $p = 5^{\$}$ ou $p = 10^{\$}$

(3 points)

(Si l'étudiant(e) donne les formules quadratiques c'est correct)

Question 8: [5pts]

Une banque accepte de vous prêter 11 000 $ en retour d'un remboursement de 13 000 $ sur 5 ans. On supposant que l'intérêt annuel r est composé **continuellement**.

a) Donnez l'expression de la fonction valeur $v(t)$ correspondante.

(2 points) $v(t) = 11000\, e^{rt}$

b) Quel est le taux d'intérêt annuel r? Exprimez votre réponse en logarithme naturel.

Puisque $v(5) = 13000$

donc $13000 = 11000\, e^{5r}$

d'où $e^{5r} = \frac{13}{11} \Rightarrow 5r = \ln\left(\frac{13}{11}\right)$

d'où $\boxed{r = \frac{\ln\left(\frac{13}{11}\right)}{5}}$

(3 points)

Université d'Ottawa
Département de Mathématiques et de Statistiques
MAT 1700 A- Méthodes Mathématiques I
Professeur : M'Hammed Mountassir

Examen partiel I – V-2 (Version 2)

13/10/2015

Nom :..Solutionnaire

Numéro d'étudiant :..........

Instructions: (Lisez-les attentivement S.V.P.)

- Écrivez votre nom et numéro d'étudiant dans la première page dans l'espace précisé.
- La durée de cet examen est de **80 minutes**.
- Cet examen est un examen à livre fermé qui comporte **8 questions**.
- Vous devez justifier vos réponses.
- Vous avez une page supplémentaire à la fin que vous pouvez utiliser comme feuilles de brouillon.
- Les calculatrices ne sont pas permises.
- **Ne pas détacher ce livret.**

BONNE CHANCE!!!

Note Totale **sur 45**	

Question 1: [5pts]

Trouvez les asymptotes horizontales et verticales de la fonction suivante, si elles existent (inscrivez vos réponses en bas):

$$f(x) = \frac{5x-30}{x^2-36}$$

Les asymptotes horizontales

À droite

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x-30}{x^2-36} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(5-\frac{30}{x})}{x^2(1-\frac{36}{x^2})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5-\frac{30}{x}}{x(1-\frac{36}{x^2})}$$

$$= 0$$

À gauche

$$L_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x-30}{x^2-30} = 0$$

donc $y=0$ est une A.H (à droite et à gauche)

Les asymptotes verticales : $x=6$ et $x=-6$ sont des asymptotes verticales éventuelles.

en $x=6$

$$L = \lim_{x\to 6} \frac{5(x-6)}{(x-6)(x+6)} = \lim_{x\to 6} \frac{5}{x+6} = \frac{5}{12}.$$

donc $x=6$ n'est pas une A.V.

en $x=-6$

$$L = \lim_{x\to -6} \frac{5(x-6)}{(x-6)(x+6)} = \lim_{x\to -6} \frac{5}{x+6} = \pm\infty \Rightarrow x=-3 \text{ est une A.V}$$

Asymptote horizontale: $y=0$ ← (2 points)

Asymptote verticale: $x=-6$ ← (3 points)

Question 2: [5pts]
Une petite entreprise achète une pièce d'équipment pour 65 000 \$ et estime que sa durée de vie sera de 30 ans, après lesquels elle aura une valeur de 5 000 \$.

(a) Donnez la formule pour la valeur de la pièce après t années, $V(t)$.

le modèle est linéaire donc $V(t) = mt + b$ avec $m = \frac{V(30)-V(0)}{30-0} = \frac{5000-65000}{30}$

$= -2000$ (2 points)

d'où $\boxed{V(t) = -2000t + 65000}$

(b) Quelle est la valeur de la pièce après 5 ans ?

$V(5) = -2000(5) + 65000 = 55000\$$ (1 point)

(c) Quand est-ce que cette pièce aura une valeur de 35 000 \$?

On cherche t tel que $V(t) = 35000$

$\Rightarrow 65000 - 2000t = 35000 \Rightarrow 2000t = 30000 \Rightarrow$ $t = 15$ ans

(1 point)

(d) Quel est le taux de dépréciation ?

le taux de dépréciation est

$m = -2000 \$/\text{année}$ (1 point)

Question 3: [9pts]

Évaluez les limites suivantes:

a) $\lim_{x\to 5} \frac{2x-10}{x^2-25}$. $= \frac{0}{0}$ (F. ind).

$$L = \lim_{x\to 5} \frac{2(x-5)}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x\to 5} \frac{2}{x+5} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

(3 points)

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{-8x^2+6x+7}{4x^2+1}$. $= \frac{\infty}{\infty}$ (F. ind)

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(-8+\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-8+\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}}{4+\frac{1}{x^2}}$$

$$= -2$$

(3 points).

c) $\lim_{x\to 0} \frac{-5x^5}{x^6}$. $= \frac{\infty}{\infty}$ (F. ind)

$$L_1 = \lim_{x\to 0^+} -\frac{5}{x} = -\frac{5}{0^+} = -\infty$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0^-} -\frac{5}{x} = -\frac{5}{0^-} = +\infty$$

(3 points)

Question 4: [6pts]
Soit

$$f(x) = \begin{cases} -3x+2 & \text{si } x < -1 \\ 5 & \text{si } x = -1 \\ -5x & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

(a) Donnez $f(-1)$. $= 5$

(1 point)

(b) Calculez $\lim_{x \to -1} f(x)$, si elle existe.

$$L_1 = \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (-5x) = 5$$

$$L_2 = \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (-3x+2) = 5$$

(3 points)

donc $L = \lim_{x \to -1} f(x) = 5$

(c) Est-ce que $f(x)$ est continue? Justifiez votre réponse.

f est continue en (-1) car elle vérifie les 3 conditions de la continuité. Donc elle est continue partout

(2 points)

Question 5: [4pts]
Trouvez l'inverse de la fonction suivante:

$$f(x) = \frac{3x-1}{2x-1}\ .$$

$y = \frac{3x-1}{2x-1} \Rightarrow y(2x-1) = 3x-1$

d'où $2yx - y = 3x - 1 \Rightarrow 2yx - 3x = y - 1$,

$\Rightarrow \quad x = \frac{y-1}{2y-3}$ $\qquad$ donc $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2x-3}$.

(si l'étudiant(e) donne l'expression c'est correct).

(4 points)

Question 6: [5pts]
Résolvez l'équation suivante:

$$\ln(x+1) + \ln(x-4) = \ln(6).$$

il faut que $x > -1$ et $x > 4$ donc Domaine de cette équation est $]4\,;+\infty[$.

$(x+1)(x-4) = 6 \Rightarrow x^2 - 4x + x - 4 = 6$

$x^2 - 3 - 10 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+2) = 0$

donc les solutions sont $x = 5$ et $x = -2$ (qui n'est pas dans le domaine)

donc la seule solution de cette équation est

$\boxed{x = 5}$

(si l'étudiant(e) donne les formules d'une équation quadratique ; c'est correct)

Question 7: [6pts]

a) La fabrication d'un verre en cristal nécessite un investissement initial de 1 980 $ pour le temps au four et ensuite 1.80 $ pour chaque verre fabriqué. Nous vendons les verres pour 9 $ chacun. Quel est le seuil de rentabilité?

x = le nombre de verres.

Revenu$(x) = 9x$

Coût$(x) = 1980 + 1,8x$

On atteint le seuil de rentabilité lorsque

Coût(x) = Revenu(x)

donc $1980 + 1,8x = 9x \Rightarrow 1980 = 7,2x$

donc $x = \dfrac{1980}{7,2}$ (réponse acceptée)

(3 points)

$x = 275$ unités

b) Si maintenant les fonctions **demande** et **offre** (en milliers de verts) sont données respectivement par

$$D(p) = -2p^2 + 76p \qquad \text{et} \qquad S(p) = 46p + 100\,,$$

où p est le prix par unité produite, trouvez le(s) prix d'équilibre.

Le prix d'équilibre est tel que:

$D(p) = S(p) \Rightarrow -2p^2 + 76p = 46p + 100$

$\Rightarrow 2p^2 - 30p + 100 = 0 \Rightarrow p^2 - 15p + 50 = 0$

$\Rightarrow (p-5)(p-10) = 0$

d'où $p = 5\$$ ou $p = 10\$$

(3 points)

(l'étudiant(e) qui donne les formules d'une équation quadratique a tous ses points).

Question 8: [5pts]
Une banque accepte de vous prêter 12 000 $ en retour d'un remboursement de 13 000 $ sur 6 ans. On supposant que l'intérêt annuel r est composé **continuellement**.

a) Donnez l'expression de la fonction valeur $v(t)$ correspondante.

(2 points). $v(t) = 12000\, e^{rt}$.

b) Quel est le taux d'intérêt annuel r? Exprimez votre réponse en logarithme naturel.

puisque $v(6) = 13000$

donc $12000\, e^{6r} = 13000$

$\Rightarrow e^{6r} = \frac{13}{12} \Rightarrow 6r = \ln\left(\frac{13}{12}\right)$

d'où $\boxed{r = \frac{\ln\left(\frac{13}{12}\right)}{6}}$

(3 points)