

Université d'Ottawa
Faculté de génie

École d'ingénierie et de
technologie de l'information



uOttawa

L'Université canadienne
Canada's university

University of Ottawa
Faculty of Engineering

School of Information
Technology and Engineering

ELG 2138 / 2538

Circuit Theory I / Théorie de circuits I

Fall / Automne xxxx

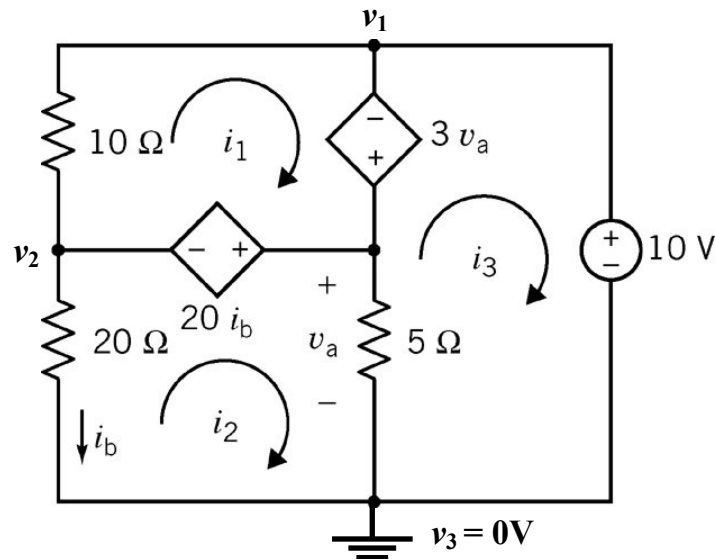
FINAL EXAMINATION (3 Hours)
EXAMEN FINAL (3 Heures)

This is a closed book exam
Answer all questions
Justify your answers
Non programmable Calculators are permitted
This exam contains 8 pages

C'est un examen à livres fermés
Répondre à toutes les questions
Justifiez vos réponses
Les calculatrices non programmables sont permises
Cet examen contient 8 pages

QUESTION 1 (Analysis of resistive Circuits – Analyse des circuits résistifs)

All steps should be justified – Toutes les étapes doivent être justifiées



Using the mesh current method, determine the value of the currents i_1 , i_2 and i_3 . Write the values calculated in the Table given on the next page.

En utilisant la méthode des courants de maille, déterminer les valeurs des courants i_1 , i_2 et i_3 . Écrire les valeurs calculées dans le tableau donné à la page suivante.

$$\text{Sources contrôlées : } v_a = 5(i_2 - i_3) \text{ et } i_b = -i_2 \rightarrow 20 i_b = -20 i_2 \text{ et } 3 v_a = 15(i_2 - i_3)$$

$$\text{Loi des mailles : } -15(i_2 - i_3) + (-20 i_2) + 10 i_1 = 0$$

$$-(-20 i_2) + 5(i_2 - i_3) + 20 i_2 = 0$$

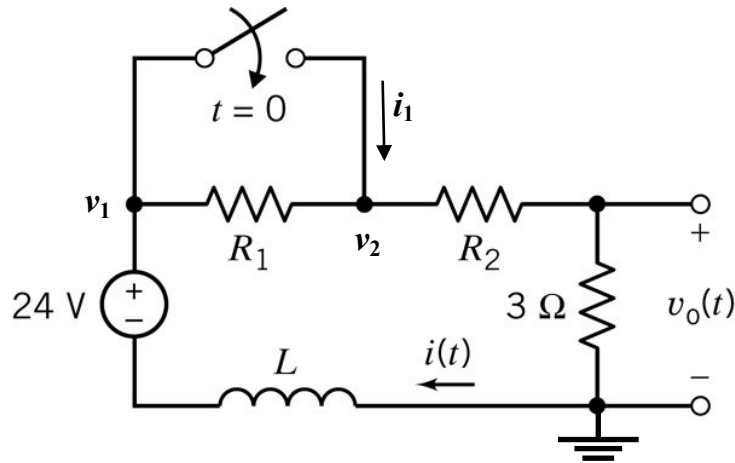
$$10 - 5(i_2 - i_3) + 15(i_2 - i_3) = 0$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 10 & -35 & 15 \\ 0 & 45 & -5 \\ 0 & 10 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$i_1 = -1.25 \text{ A}$$

$$i_2 = 0.125 \text{ A}$$

$$i_3 = +1.125 \text{ A}$$

QUESTION 2 (Response of First-order Circuits – Réponse des circuits du premier ordre)**All steps should be justified – Toutes les étapes doivent être justifiées**

The circuit is at steady state before the switch closes at time $t = 0$. The input to the circuit is the voltage of the voltage source, 24V. The output of the circuit, the voltage across the 3Ω resistor, is given by

$$v_o(t) = [6 - 3e^{-0.35t}] \text{ V} \quad \text{when} \quad t > 0$$

Le circuit est en état permanent avant que l'interrupteur ne soit fermé au temps $t = 0$. L'entrée du circuit est la tension de la source de tension, 24V. La sortie du circuit, la tension aux bornes de la résistance 3Ω , est donnée par

$$v_o(t) = [6 - 3e^{-0.35t}] \text{ V} \quad \text{quand} \quad t > 0$$

- a) Determine the value of the current $i(t)$ for $t > 0$.
Déterminer la valeur du courant $i(t)$ à $t > 0$.

Le courant dans l'inductance est égal à celui dans la résistance de 3Ω

$$i(t) = \frac{v_o(t)}{3} = \frac{6 - 3e^{-0.35t}}{3} = 2 - e^{-0.35t} \text{ A} \quad \text{quand} \quad t > 0$$

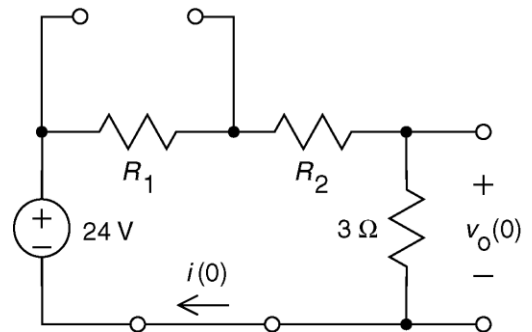
- b) Deduce the value of $i(0^+)$, the value of the current just after the switch closed.
En déduire la valeur de $i(0^+)$, la valeur du courant juste après la fermeture de l'interrupteur.

$$t = 0 \quad i(0^-) = i(0^+) = i(0)$$

Dans l'état permanent, l'inductance est équivalente à un court circuit. Donc :

$$R_1 i(0) + R_2 i(0) + 3 i(0) - 24 = 0$$

$$\Rightarrow i(0) = \frac{24}{R_1 + R_2 + 3}$$



- c) Determine the value of the two resistances R_1 and R_2 .
Déterminer la valeur des deux résistances R_1 et R_2 .

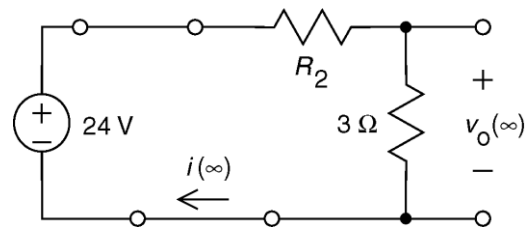
La valeur de $i(0)$ peut être aussi obtenue en mettant $t = 0$

dans l'équation de $i(t)$: $i(0) = 2 - e^0 = 1 \text{ A} \rightarrow 1 = \frac{24}{R_1 + R_2 + 3} \Rightarrow R_1 + R_2 = 21$

$$t > 0$$

Le courant en régime permanent est $i(\infty)$.

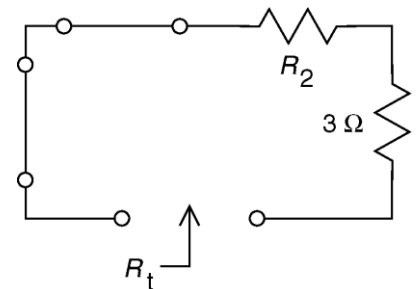
$$R_2 i(\infty) + 3 i(\infty) - 24 = 0 \Rightarrow i(\infty) = \frac{24}{R_2 + 3}$$



Or la valeur de $i(\infty)$ peut être aussi obtenue en mettant $t = \infty$

dans l'équation de $i(t)$: $i(\infty) = 2 - e^{-\infty} = 2 \text{ A}$

$$\rightarrow 2 = \frac{24}{R_2 + 3} \Rightarrow R_2 = 9 \text{ } \Omega \rightarrow R_1 = 12 \text{ } \Omega$$



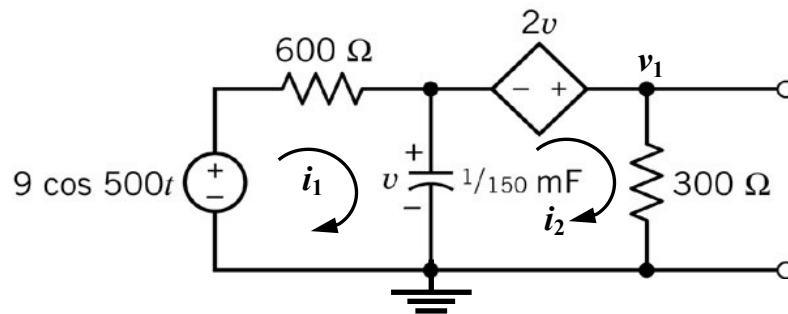
- d) Determine the value of the inductance L .
Déterminer la valeur de l'inductance L .

$$i(t) \text{ est de la forme } e^{-t/\tau} \rightarrow -0.35 t = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \tau = 2.857 \text{ s}$$

$$R_t = R_2 + 3 = 9 + 3 = 12 \text{ } \Omega \quad \tau = \frac{L}{R_t} \rightarrow 2.857 = \frac{L}{12} \Rightarrow L = 34.28 \text{ H}$$

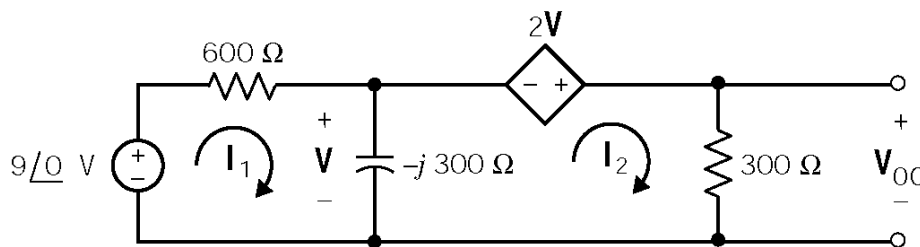
QUESTION 3 (Sinusoidal Steady-State Analysis – Analyse sinusoïdale en régime permanent)

All steps should be justified – Toutes les étapes doivent être justifiées



- a) Using the phasor notation and **the mesh current method**, find the phasor V_{OC} of the **Thevenin** equivalent **open circuit** voltage of the circuit.

En utilisant la notation en phaseurs et la **méthode des courants de maille**, déterminer le phaseur V_{OC} de la tension équivalente de **Thévenin en circuit ouvert** du circuit.



Les équations de maille donnent :

$$600I_1 - j300(I_1 - I_2) = 9 \Rightarrow (600 - j300)I_1 + j300I_2 = 9\angle 0^\circ$$

$$-2V + 300I_2 - j300(I_1 - I_2) = 0 \quad \text{et} \quad V = -j300(I_1 - I_2) \Rightarrow j3I_1 + (1 - j3)I_2 = 0$$

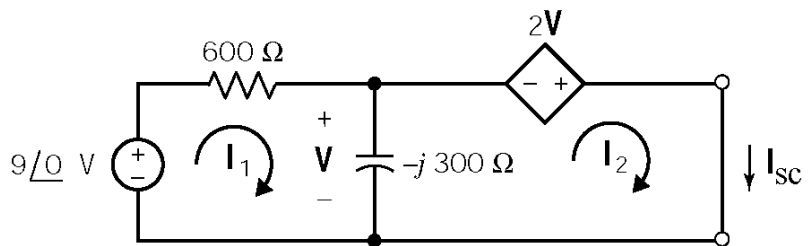
$$\rightarrow I_2 = 0.0124\angle -16^\circ \text{ A} \quad \rightarrow V_{oc} = 300I_2 = 3.71\angle -16^\circ \text{ V}$$

- b) Using the phasor notation and the **mesh current method**, find the phasor I_{SC} of the **Norton** equivalent **short circuit** current of the circuit.

En utilisant la notation en phaseurs et la **méthode des courants de maille**, déterminer le phaseur I_{SC} du courant équivalent de **Norton en court circuit** du circuit.

$$-2V - V = 0 \Rightarrow V = 0$$

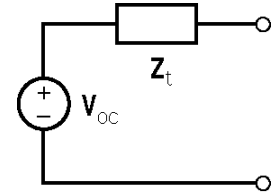
$$\Rightarrow I_{sc} = \frac{9\angle 0^\circ}{600} = 0.015\angle 0^\circ \text{ A}$$



- c) Deduce from parts a) and b) the total **Thevenin** equivalent circuit.
 Déduire des parties a) et b) le schéma équivalent complet de **Thévenin** du circuit.

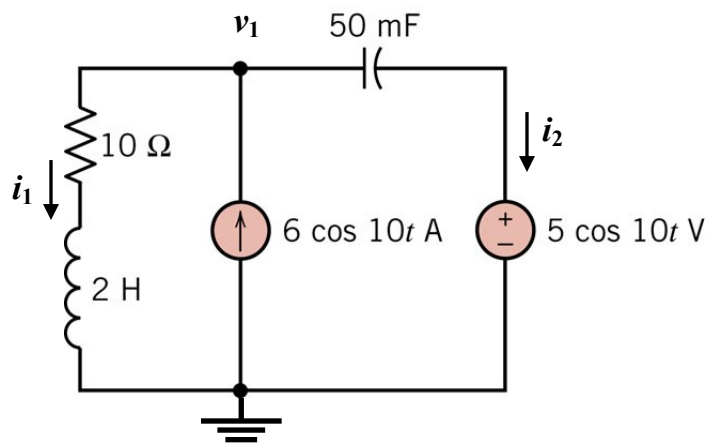
Impédance de Thévenin
$$\mathbf{Z}_T = \frac{\mathbf{V}_{oc}}{\mathbf{I}_{sc}} = \frac{3.545 \angle -16^\circ}{0.015 \angle 0^\circ} = 247 \angle -16^\circ \Omega$$

$$\mathbf{V}_{oc} = 300 \mathbf{I}_2 = 3.71 \angle -16^\circ \text{ V}$$



QUESTION 4 (Sinusoidal Steady-State Power – Puissance sinusoïdale en régime permanent)

All steps should be justified – Toutes les étapes doivent être justifiées



- a) Find the phasors of the two currents $i_1(t)$ and $i_2(t)$.
 Déterminer les phaseurs des deux courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

$$(10 + j20)\mathbf{I}_1 = 5 \angle 0^\circ - j2\mathbf{I}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 6 \angle 0^\circ$$

$$\Rightarrow (10 + j20)\mathbf{I}_1 + j2\mathbf{I}_2 = 5 \angle 0^\circ$$

$$\rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 10 + j20 & j2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 10 + j18$$

$$\rightarrow \mathbf{I}_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 5 & j2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = \frac{5 - j12}{10 + j18} = 0.63 \angle 232^\circ \text{ A} = -0.39 - j0.5 \text{ A}$$

$$\rightarrow \mathbf{I}_2 = 6 - \mathbf{I}_1 = 6 + 0.39 + j.5 = 6.39 + j.5 = 6.41 \angle 4.47^\circ \text{ A}$$

- b) Find the complex powers delivered by the two independent sources.
Déterminer les puissances complexes délivrées par les deux sources indépendantes.

$$\mathbf{S}_{5\angle 0^\circ} = \frac{1}{2}(5\angle 0^\circ)(-\mathbf{I}_2^*) = 2.5(6.41\angle(180-4.47)) = -16.0 + j1.25 \text{ VA}$$

$$\mathbf{S}_{6\angle 0^\circ} = \frac{1}{2}[5-j2\mathbf{I}_2](6\angle 0^\circ) = [5-j2(6.39+j.5)]3 = 18.0-j38.3 \text{ VA}$$

- c) Find the complex powers absorbed by the three passive elements.
Déterminer les puissances complexes absorbées par les trois éléments passifs.

$$\mathbf{S}_{10\Omega} = \frac{1}{2}10|\mathbf{I}_1|^2 = \frac{10}{2}(.63)^2 = 2.0 \text{ VA}$$

$$\mathbf{S}_{j20\Omega} = \frac{j20}{2}|\mathbf{I}_1|^2 = j4.0 \text{ VA}$$

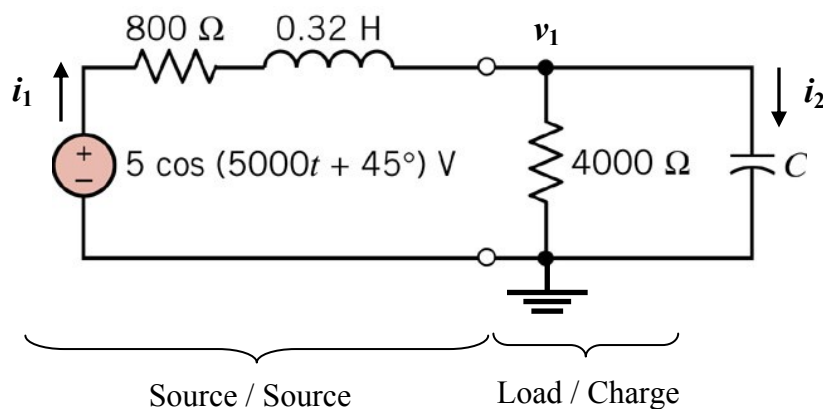
$$\mathbf{S}_{-j2\Omega} = \frac{1}{2}(-j2)|\mathbf{I}_2|^2 = -j(6.41)^2 = -j41.1 \text{ VA}$$

- d) Justify the energy conservation theorem.
Justifier le théorème de conservation d'énergie.

$$\mathbf{S}_{\text{total absorbée}} = 2.0 - j 37.1 \text{ VA} \approx \mathbf{S}_{\text{total délivrée}} = 2.0 - j 37.2 \text{ VA}$$

QUESTION 5 (Maximum Power theorem – Théorème de la puissance maximale)

All steps should be justified – Toutes les étapes doivent être justifiées



The capacitor has been added to the load to maximize the power absorbed by the 4000 Ω resistor. What value of capacitance should be used to accomplish that objective?

Le condensateur a été ajouté à la charge pour maximiser la puissance absorbée par la charge de 4000 Ω . Quelle valeur ce condensateur doit-il avoir pour atteindre cet objectif ?

$$\mathbf{Z}_t = 800 + j1600 \Omega \quad \text{and} \quad \mathbf{Z}_L = \frac{R \left(\frac{-j}{\omega C} \right)}{R - \frac{j}{\omega C}} = \frac{R - j\omega R^2 C}{1 + (\omega RC)^2}$$

$$\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_t^* \Rightarrow \frac{R \left(\frac{-j}{\omega C} \right)}{R - \frac{j}{\omega C}} = \frac{R - j\omega R^2 C}{1 + (\omega RC)^2} = 800 - j1600 \Omega$$

En égalant les parties réelles :

$$\Rightarrow 800 = \frac{R}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{4000}{1 + [(5000)(4000)C]^2} \Rightarrow C = 0.1 \mu\text{F}$$