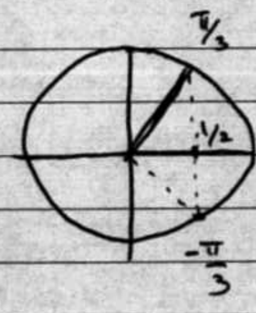
①

DGD 3 - Solution

Ex 1) Résoudre les équations (inégalités) suivantes :

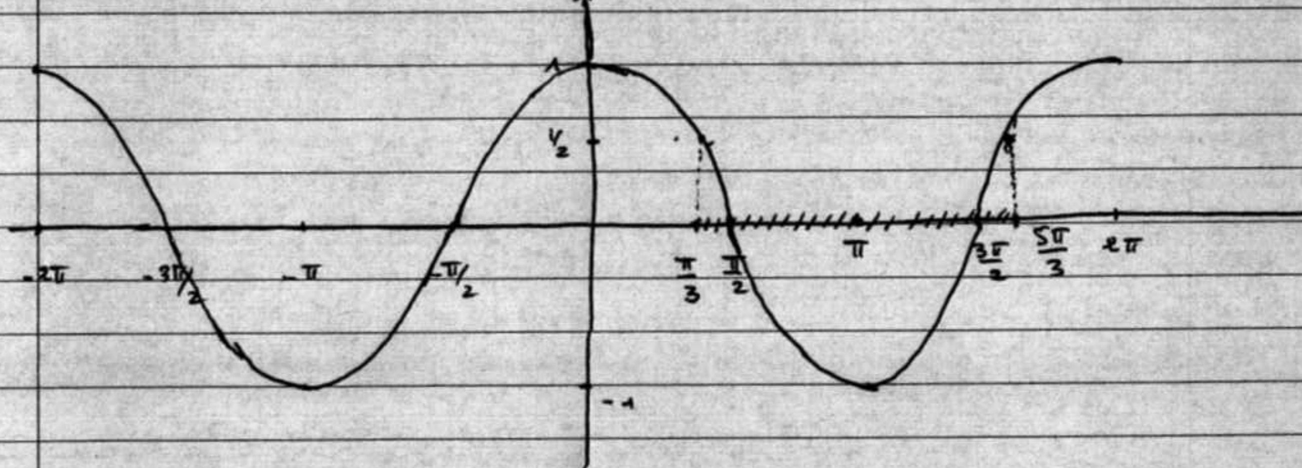
a) $\cos x \leq \frac{1}{2}$

D'après le cercle trigonométrique



$\cos x = \frac{1}{2} \iff x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$

$\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi \; ; \; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}\right)$



D'après le graphe de $\cos x$, la solution dans $[0, 2\pi]$ est : $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

Comme $\cos x$ est périodique, l'ensemble de solutions est donné par :

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right].$$

b) $2^{\log_2(x) + \log_2(x+2)} = 4^{\log_2(x+1)}$

On note que : $\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ x+2 > 0 \\ x+1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x > 0$

On a $2^{\log_2(x) + \log_2(x+2)} = 4^{\log_2(x+1)}$

$\iff 2^{\log_2(x(x+2))} = 2^{2\log_2(x+1)}$

$\iff 2^{\log_2(x(x+2))} = 2^{\log_2 (x+1)^2}$

$\iff x(x+2) = (x+1)^2$ car 2^x est la réciproque de $\log_2(x)$

2

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1$

$\Leftrightarrow \quad 0 = 1$ impossible

D'où

$$S = \emptyset$$

Ex2) Trouver $f^{-1}(x)$ pour $f(x) = \dfrac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$

On pose

$$y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x} \Leftrightarrow y(1 + \ln x) = 1 - \ln x$$

$$\Leftrightarrow y \ln x + \ln x = 1 - y$$

$$\Leftrightarrow (1 + y) \ln x = 1 - y$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \frac{1 - y}{1 + y}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{\frac{1-y}{1+y}}$$

D'où $\quad f^{-1}(x) = e^{\frac{1-x}{1+x}}$

Ex3) soit $\quad f(x) = \dfrac{2x^2 - 10x + 12}{|2x - 6|}$

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / \ |2x - 6| \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / \ 2x - 6 \neq 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / \ x \neq 3\} = \mathbb{R} \setminus \{3\} =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$

b) On remarque que $2x^2 - 10x + 12 = 2(x - 3)(x - 2)$

et $\quad |2x - 6| = \begin{cases} 2(x-3) & \text{si } x \geq 3 \\ -2(x-3) & \text{si } x < 3 \end{cases}$

donc $\quad f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x > 3 \\ 2 - x & \text{si } x < 3 \end{cases}$

③

* A.H :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x - 2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2 - x = +\infty$

Il n'y a pas d'asymptotes horizontales

* A.V :

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} x - 2 = 1$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} 2 - x = -1$

Il n'y a pas d'asymptotes verticales

c) D'après (a) et la forme simplifiée en (b), f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{3\} =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$

Ex4) Trouver les valeurs de a et b, pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2a & \text{si } x < -2 \\ 3ax + b & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ 3x - 2b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en $x = -2$ et $x = 1$.

* Continuité en $x = -2$:

On a $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} x + 2a = -2 + 2a$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} 3ax + b = -6a + b$

$f(-2) = -6a + b$

f est continue en $x = -2 \iff -2 + 2a = -6a + b$

$\iff b = 8a - 2 \quad (1)$

④

⊛ Continuité en $x = 1$:

On a $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 3ax + b = 3a + b$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 3x - 2b = 3 - 2b$

$f(1) = 3a + b$

f est continue en $x = 1 \iff 3a + b = 3 - 2b$

$\iff 3b = 3 - 3a$

$\iff b = 1 - a \qquad (2)$

De (1) et (2), on trouve que

$8a - 2 = 1 - a \iff 9a = 3$

$\iff a = 1/3$

On remplace dans (1) ou (2) pour trouver $b = 2/3$

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$ si $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{2}{3}$

EX 5] En utilisant la définition de la dérivée, trouver la dérivée de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2 - 1} - \frac{1}{x^2 - 1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{(x^2 - 1) - ((x+h)^2 - 1)}{((x+h)^2 - 1)(x^2 - 1)}}{h}.$$

⑤

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{x^2 - 1 - (x+h)^2 + 1}{((x+h)^2 - 1)(x^2 - 1)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 - (x+h)^2}{h((x+h)^2 - 1)(x^2 - 1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x - x - h)(x + x + h)}{h((x+h)^2 - 1)(x^2 - 1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-\cancel{h}(2x + h)}{\cancel{h}((x+h)^2 - 1)(x^2 - 1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-(2x + h)}{((x+h)^2 - 1)(x^2 - 1)} = \frac{-2x}{(x^2 - 1) \cdot (x^2 - 1)} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$