MAT 2779
Examen Partiel

23 octobre 2012 **Professeur Gilles Lamothe**
Durée : 80 minutes

 # d'étudiant:____________________

Nom : ____________________ **Prénom:** ____________________

C'est un examen à livre fermé. Une feuille de formules et le tableau pour la loi normale centrée et réduite sont incluses avec l'examen. Seule une calculatrice non-programmable et non-graphique est permise. Notez votre choix de réponse pour chaque question dans le tableau ci-dessous.

Question	Réponse
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

N.B. : À la fin de l'examen, remettre seulement cette page. Vous pouvez garder le questionnaire.

****

1. Soit X variable aléatoire d'image $\{0,1,2,3,4\}$. La fonction de répartition de X est ci bas:

x	0	1	2	3	4
$P(X \leq x)$	0,5	0,6	0,7	0,9	1

Déterminer l'espérance de X et la variance de X.

A) $E(X) = 1,3$, $\mathrm{V}(X) = 0,61$ B) $E(X) = 0,7$, $\mathrm{V}(X) = 2,21$
C) $E(X) = 1,3$, $\mathrm{V}(X) = 0,61$ D) $E(X) = 0,5$, $\mathrm{V}(X) = 1,1$
E) $E(X) = 1,3$, $\mathrm{V}(X) = 2,21$

Solution: Voici la loi de probabilité de X:

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0,5	0,1	0,1	0,2	0,1

$$E(X) = 0(0,5) + 1(0,1) + 2(0,1) + 3(0,2) + 4(0,1) = 1,3$$

$$\mathrm{V}(X) = 0^2(0,5)+1^2(0,1)+2^2(0,1)+3^2(0,2)+4^2(0,1)-(1,3)^2 = 3,9-1,69 = 2,21$$

La réponse est E.

2. Un nouveau test de dépistage est proposé pour la tuberculose. Pour étudier sa sensibilité, le test de dépistage est appliqué à 200 patients atteints de tuberculose et 200 personnes choisies au hasard dans la communauté (dite un groupe témoin), qui n'ont pas la tuberculose. Le tableau suivant est un sommaire des résultats des tests:

	Patients ayant la tuberculose	Groupe témoin	Total
Test positif	180	40	220
Test négatif	20	160	180
Total	200	200	400

Quel est la sensibilité du test?

A) 0,90 B) 0,80 C) 0,82 D) 0,89 E) 0,10

Solution: La résponse est A.

$$\text{sensibilité} = P(\text{test} + |\text{vrai}+) = \frac{180}{200} = 0,9$$

3. Utilisez les données de la Question 2. Dans un certain pays pauvre, la prévalence de la tuberculose est estimée à 3,3%. Si le test de dépistage est appliqué à toute la population, quelle proportion des ces individus auront un résultat positif au test?
   Indice: Vous pouvez supposer que le test aura la même sensibilité et taux des faux positifs qu'à la Question 2.

   A) 0,1492 B) 0,0297 C) 0,2000 D) 0,1934 E) 0,2231

   Solution: On sait que $P(\text{Vrai}+) = 0,033$. Par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(\text{Test}+) &= P(\text{Test}+|\text{Vrai}+)P(\text{Vrai}+) + P(\text{Test}+|\text{Vrai}-)P(\text{Vrai}-) \\ &= (0,9)(0,033) + (0,2)(0,967) = 0,2231 \end{aligned}$$

   où $P(\text{Test}+|\text{Vrai}-) = 40/200 = 0,2$.

4. Chez les humains, aussi bien la ligne de cheveux sur le front en forme de v et une fossette au menton sont des traits héréditaires dominants. Chez un couple, la femme a une ligne de cheveux sur le front en forme de v et une fossette au menton, et elle est hétérozygote pour les deux traits. L'homme n'a pas une ligne de cheveux sur le front en forme de v et il n'a pas une fossette au menton. Quelle est la probabilité que leur enfant ait une ligne de cheveux sur le front en forme de v et une fossette au menton?

   A) 1/2 B) 1 C) 3/4 D) 0 E) 1/4
   Solution: Soit P et p les allèles pour la ligne de cheveux sur le front en forme de v et son absence, respectivement. Soit C et C les allèles pour la fossette au menton et son absence, respectivement. Le génotype de la femme est $PpCc$ et pour l'homme c'est $ppcc$. Il y a quatre résultats possible au croisement : $PpCc$ (une ligne de cheveux sur le front en forme de v et une fossette au menton), $Ppcc$ (une ligne de cheveux sur le front en forme de v, sans fossette au menton), $ppCc$ (sans ligne de cheveux sur le front en forme de v, une fossette au menton), $ppcc$ (sans ligne de cheveux sur le front en forme de v, sans fossette au menton). La probabilité que leur enfant ait une ligne de cheveux sur le front en forme de v et une fossette au menton est $1/4$. La réponse est E.

5. Supposons que le niveau de cholestérol chez les femmes adultes peut être modélisé avec une loi normale avec une moyenne de 188 mg/dL et un

écart type de $24\,\mathrm{mg/dL}$. Nous voulons trouver un niveau l tel que 15% des femmes ont un niveau de cholestérol supérieur à l. Laquelle des commandes de R suivantes donne la bonne valeur pour l.

A) qnorm(0.15,188,24)
B) qnorm(0.85,188,576)
C) qnorm(0.85)
D) qnorm(0.15,188,576)
E) 24*qnorm(0.85,0,1)+188

Solution: Le niveau de cholestérol X est une variable aléatoire de moyenne 188 et d'écart type 24. On veut trouver une valeur l tel que

$$P(X > l) = 0,15.$$

Ceci veut dire que $P(X \leq l) = 0,85$. Alors,

$$0,85 = P\left(Z < \frac{l-188}{24}\right) = \Phi\left(\frac{l-188}{24}\right).$$

Alors

$$\frac{l-188}{24} = \Phi^{-1}(0,85) = z$$

où z=qnorm(0.85,0,1). Alors, $l = 188 + 24z$. La réponse est E.

6. Un nouveau règlement en Ontario interdit toute consommation d'alcool au volant. Plusieurs individus ont décidé de conduire la veille du jour de l'an 2013. Parmi ceux-ci, 32 % avaient un peu d'alcool dans le sang, 9 % ont eu un accident et 6 % ont eu un accident et avait un peu d'alcool dans le sang. Quel est le pourcentage des conducteurs qui n'ont pas consommé d'alcool et qui n'ont pas eu un accident la veille du jour de l'an 2013?

   A) 35% B) 65% C) 47% D) 53% E) 33%

   Solution: Soient A l'événement que la personne ait consommé de l'alcool et B que la personne ait eu un accident. On sait que $P(A) = 0,32$; $P(B) = 0,09$ et $P(A \cap B) = 0,06$. Par la règle de l'addition :

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,32 + 0,09 - 0,06 = 0,35 = 35\%$$

   On veut $P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 65\%$. La réponse est B.

7. Les agriculteurs canadiens cultivent une grande quantité de maïs génétiquement modifié. Environ 19 % du maïs est génétiquement modifié pour être résistant aux insectes et environ 70 % du maïs est génétiquement modifié pour être résistant aux herbicides. Parmi les maïs qui sont génétiquement modifiés pour être résistant aux herbicides, environ 15 % sont génétiquement modifiés pour être résistant aux insectes. Si vous choisissez au hasard un épi de maïs qui a été modifié pour être résistant aux insectes, quelle est la probabilité qu'il soit modifié pour être résistant aux herbicides?

   A) 0,8867 B) 0,5526 C) 0,7895 D) 0,1500 E) 0,1050

   Solution: Soient A et B les événements que le maïs est génétiquement modifié pour être résistant aux insectes et aux herbicides, respectivement. On sait que $P(A) = 0,19$, $P(B) = 0,70$ et $P(A|B) = 0,15$. Par la formule de Bayes, on obtient

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{(0,15)(0,70)}{0,19} = 0,5526.$$

   La réponse est B.

8. Dans les dernières années, un grand nombre de frênes à Ottawa ont été infestés par un insecte appelé l'agrile du frêne. Les arbres les plus vieux ont des plus grands diamètres et des plus grandes chances d'être infestés. Dans un certain quartier, tous les frênes ont été plantés à la même époque, autour de l'année 1960. Leurs diamètres suivent une loi normale avec une moyenne de $\mu =$ 69,9 cm et un écart type de $\sigma = 5$ cm. Cinq frênes sont choisis au hasard dans ce quartier. Quelle est la probabilité qu'au plus un arbre a un diamètre supérieur à 73 cm?

   A) 0,5957 B) 0,2108 C) 0,3850 D) 0,7324
   E) 0,2676

   Solution: Soit X le diamètre d'un arbre. Par le tableau 17.3,

$$\begin{aligned} P(X > 73) &= 1 - P\left(\frac{X - 69.9}{5} \leq \frac{73 - 69.9}{5}\right) \\ &= 1 - \Phi(0,62) = 1 - 0,7324 = 0,2676. \end{aligned}$$

   Soit Y le nombre d'arbres avec un diamètre plus grand que 73 cm dans un échantillon aléatoire de taille $n = 5$. Y suit une loi binomiale avec $n = 5$

et $p = 0,2676$. Alors,

$$P(Y \leq 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1) = (0,7324)^5 + 5(0,2676)(0,7324)^4 = 0,5957$$

La réponse est A.

9. La revue National Geographic en octobre 2013 souligne une histoire du crapaud Kihanzi de la Tanzanie, qui a été sauvé de l'extinction grâce aux efforts de conservation. En 2009, l'espèce avait disparu dans la nature. Heureusement, 500 crapauds avait été capturés en 2004, la moitié furent envoyés au zoo du Bronx, et l'autre moitié au zoo de Toledo. Certains de ces crapauds ont été infectés par des champignons mortels qui dévastait les populations d'amphibiens dans le monde entier. Supposons que le taux d'infection est de 75,7 % chez les crapauds au zoo du Bronx, et 84,3 % au zoo de Toledo. Nous choisissons au hasard un crapaud parmi les 500. Quelle est la probabilité qu'il soit infecté? Est-ce que l'infection du crapaud par le champignon est indépendant de l'emplacement du zoo?

   A) 0,8; oui B) 0,8, non C) 0,5, oui D) 0,5, non
   E) pas assez d'information pour répondre à la question

   Solution: Soit I l'événement qu'un crapaud est infecté, soit B l'événement que le crapaud est au zoo du Bronx et T l'événement que le crapaud est au zoo de Toledo. On sait que $P(B) = P(T) = 0,5$, $P(I|B) = 0,757$ et $P(I|T) = 0,843$. Par la formule des probabilités totales :

$$P(I) = P(I|B)P(B) + P(I|T)P(T) = (0,757)(0,5) + (0,843)(0,5) = 0,8.$$

   Puisque $P(I) \neq P(I|B)$, alors I est dépendant de B. La réponse est B.

10. Un forestier a mesuré 27 arbres dans une vaste zone boisée qui est à vendre. Il a constaté que le diamètre moyen est 26 cm et que l'écart type est 12 cm. Supposons que ces arbres fournissent une bonne description de l'ensemble de la forêt et que le diamètre d'un arbre est normalement distribuée. Quelle pourcentage de ces arbres devrait avoir un diamètre plus grand que 35 cm diamètre?

   A) 84,13% B) 75% C) 77,34% D) 22,66% E) 15,87%

   Solution: Soit X le diamètre d'un arbre. On sait que X suit une loi normale de moyenne $\mu = 26$ cm et d'écart type $\sigma = 12$ cm. En utilisant le tableau

17.3,

$$\begin{aligned}
P(X > 35) &= P\left(\frac{X-26}{12} > \frac{35-26}{12}\right) \\
&= P(Z > 0,75) = 1 - \Phi(0,75) \\
&= 1 - 0,7734 = 0,2266
\end{aligned}$$

La réponse est D.

11. Considérons la sortie suivante de R :

```
> pbinom(20,50,0.3)
[1] 0.9522362
> pbinom(19,50,0.3)
[1] 0.9151974
> pbinom(18,50,0.3)
[1] 0.8594401
> pbinom(15,50,0.3)
[1] 0.5691784
> pbinom(14,50,0.3)
[1] 0.4468316
> dbinom(15,50,0.3)
[1] 0.1223469
```

Soit X une variable aléatoire avec $n = 50$ et $p = 0.3$. Utiliser la sortie de R ci-haut pour calculer $P(15 < X \leq 19)$.

A) 0,468 B) 0,346 C) 0,793 D) 0,944 E) 0,918

Solution: On a

$$\begin{aligned}
P(15 < X \leq 19) &= P(X = 16) + P(X = 17) + P(X = 18) + P(X = 19) \\
&= P(X \leq 19) - P(X \leq 15) \\
&= 0,9151974 - 0,5691784 = 0.3460190
\end{aligned}$$

La réponse est B.

12. La Société canadienne du sang analyse les dons sanguins des Canadiens pour le virus du Nil occidental, selon le protocole suivant. Les échantillons provenant d'unités de sang sont rassemblées, six unités à la fois, et on vérifie pour la présence du virus du Nil occidental. Si au moins une unité parmi les six unités est positive pour le virus du Nil occidental, alors le groupe de six sera positif.

a) Une collecte de sang aura lieu dans une ville en particulier. Supposons que la prévalence du virus du Nil occidental dans la ville est de 1 sur 500. En supposant l'indépendance entre le statut de la maladie des donateurs, trouver la probabilité qu'une groupe de six individus sera positif.

b) Une collecte de sang a lieu dans la ville et on reçoit un don sanguin de 216 personnes. Trouver la probabilité qu'au moins un groupe de six unités sera positif.

A) a) 0,00200 ; b) 0,432

B) a) 0,01194 ; b) 0,351

C) a) 0,98806 ; b) 0,282

D) a) 0,01188 ; b) 0,417

E) a) 0,01200 ; b) 0,070

Solution: a) Soit X le nombre d'unités positives parmi un groupe de 6. X suit une loi binomiale avec $n = 6$ et $p = 1/500 = 0,002$. Le groupe sera positif si au moins une des unités est positive, alors on veut

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0,998)^6 = 0,01194$$

b) Il y a 216/6=36 groupes de 6. De la partie a), un groupe de six a une probabilité de 0,01194 d'être positif. Soit Y le nombre de groupes positifs parmi 36 groupes. Y suit une loi binomiale avec $n = 36$ et $p = 0,01194$. On veut

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (1 - 0,01194)^{36} = 0,351$$

La réponse est B.