MAT 2784 A: Équations différentielles et Méthodes numériques

Examen Partiel I (Automne 2015)

Professeur: Joseph Khoury **Durée: 80 minutes**

NOM de famille: Solution

Prénom:

Numéro d'étudiant:

Aucune note n'est permise.

Les calculatrices sont permises.

Cette examen comporte 5 questions et 7 pages. Toutes les questions sont à développement et valent un total 21 points. Les questions requièrent une réponse détaillée. Prenez soin de bien rédiger vos solutions. Vous pouvez utiliser le verso des pages et les pages additionnelles à la fin si vous manquez d'espace au recto.

1. **[5 points]** Résoudre le PVI suivant:

$$\underbrace{(3y^2\cos x + 4xy)}_{M}dx + \underbrace{(4x^2 + 9y\sin x + 1)}_{N}dy = 0, \quad y(0) = 1.$$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 6y\cos x + 4x$
$\frac{\partial N}{\partial x} = 8x + 9y\cos x$

$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow$ l'équation pas exacte. On essaie de chercher un facteur d'intégration

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = \frac{-3y\cos x - 4x}{y(3y\cos x + 4x)} = \frac{-(3y\cos x + 4x)}{y(3y\cos x + 4x)} = -\frac{1}{y} = g(y).$$

un facteur d'intégration est donné par $\mu(y) = e^{-\int -\frac{1}{y}dy} = e^{\ln y} = y.$

on multiplie alors par y:

$$\underbrace{(3y^3\cos x + 4xy^2)}_{M^*}dx + \underbrace{(4x^2y + 9y^2\sin x + y)}_{N^*}dy = 0$$

$\frac{\partial M^*}{\partial y} = 9y^2\cos x + 8xy$
$\frac{\partial N^*}{\partial x} = 8xy + 9y^2\cos x$

$\frac{\partial M^*}{\partial y} = \frac{\partial N^*}{\partial x} \Rightarrow$ la nouvelle équation est maintenant exacte.

on cherche une fonction $F(x,y)$ telle que $\frac{\partial F}{\partial x} = M^*$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = N^*$:

$\frac{\partial F}{\partial x} = 3y^3\cos x + 4xy^2 \Rightarrow F = 3y^3\sin x + 2x^2y^2 + h(y) \Rightarrow$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 9y^2\sin x + 4x^2y + h'(y)$. En comparant avec $\frac{\partial F}{\partial y} = N^*$, on trouve que $h'(y) = y \Rightarrow h(y) = \frac{1}{2}y^2 + K$. D'où $F = 3y^3\sin x + 2x^2y^2 + \frac{1}{2}y^2 + K$.

La solution générale est alors $3y^3\sin x + 2x^2y^2 + \frac{1}{2}y^2 = C$.

$y(0) = 1 \Rightarrow C = 1/2$. La solution du PVI est alors

$$\boxed{3y^3\sin x + 2x^2y^2 + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}}$$

2. [**4 points**] Résoudre le PVI suivant:

$$y' - xy = xy^2, \quad y(0) = 1$$

Équation de Bernouilli avec $f(x) = -x$, $r(x) = x$ et $a = 2$.

Posons $u = y^{1-a} = y^{-1} \Rightarrow u' = -y^{-2}y' = -y^{-2}(xy + xy^2) = -xy^{-1} - x$

$\Rightarrow u' + xu = -x$: équation linéaire avec $f(x) = x$, $r(x) = -x$.

La solution générale est alors

$$u(x) = \frac{\int e^{\int f(x)dx} \cdot r(x)\,dx + C}{e^{\int f(x)dx}} = \frac{\int e^{\int x dx} (-x)dx + C}{e^{\int x dx}} = \frac{-\int x e^{\frac{1}{2}x^2} dx + C}{e^{+\frac{1}{2}x^2}}$$

soit $w = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow dw = x\,dx \Rightarrow u(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}\left[-\int e^w dw + C\right]$

$$= e^{-\frac{1}{2}x^2}\left[-e^{\frac{1}{2}x^2} + C\right] = Ce^{-\frac{1}{2}x^2} - 1$$

$u(0) = [y(0)]^{-1} = 1 \Rightarrow 1 = C - 1 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow$

$u = 2e^{-\frac{x^2}{2}} - 1$. La solution du PVI est alors

$$y = \frac{1}{2e^{-x^2/2} - 1}$$

3. [**4 points**] Donner la **solution générale** de chacune des équations différentielles suivantes:

(1) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

(2) $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0, \;\; x > 0$.

(1) l'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(5)}}{2}$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$: deux racines complexes conjuguées.

La solution générale est $\boxed{y = c_1 e^{-x}\cos(2x) + c_2 e^{-x}\sin(2x)}$

(2) L'équation Euler-Cauchy d'ordre 2. Son équation caractéristique

est $m^2 + (a-1)m + b = 0 \Rightarrow m^2 - 6m + 9 = 0 \Rightarrow (m-3)^2 = 0 \Rightarrow$

$m = 3$ est une racine double. La solution générale est

$$\boxed{y = c_1 x^3 + c_2 x^3 \ln x}$$

4. [**3 points**] Donner la **solution générale** de l'équation différentielle suivante:

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

Équation homogène linéaire à coefficients constants. L'équation caractéristique est $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda-2) - (\lambda-2) = 0$
$\Rightarrow (\lambda-2)(\lambda^2-1) = 0$; Il y a 3 racines réelles distinctes $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$. La solution générale est alors

$$\boxed{y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x}}$$

5. **[5 points]** Considérer l'équation

$$\cos x + 4x = 3.$$

(1) Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer que l'équation admet une solution dans l'intervalle [0, 1].
(2) Écrire l'équation sous la forme $x = g(x)$ pour une certaine fonction continue g.
(3) Montrer que la suite d'itération $x_{n+1} = g(x_n)$ converge pour n'importe quelle valeur initiale x_0.
(4) Utiliser la méthode **d'itération du point fixe** avec $x_0 = 0.5$ pour estimer la racine de l'équation $\cos x + 4x = 3$ dans l'intervalle [0, 1] à 5 décimales près.

(1) Soit $f(x) = \cos x + 4x - 3$. Alors f est clairement continue. De plus, $f(0) = -2 < 0$ et $f(1) = 1.54 > 0$. Par le Théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ pour un certain $x \in [0, 1]$.

(2) $\cos x + 4x = 3 \Rightarrow 4x = 3 - \cos x \Rightarrow x = \frac{3 - \cos(x)}{4}$. Posons $g(x) = \frac{3 - \cos(x)}{4}$, alors g est clairement continue.

(3) On vérifie les 2 conditions du Théorème vu en classe.

(i) $g'(x) = \frac{\sin x}{4}$ est clairement continue.

(ii) $|g'(x)| = \frac{1}{4}|\sin x| \leq \frac{1}{4} < 1$ pour tout x.

Alors la suite d'itération $x_{n+1} = g(x_n)$ converge pour n'importe quelle valeur initiale x_0.

(4) $x_0 = 0.5 \Rightarrow x_1 = g(x_0) = \frac{3 - \cos(0.5)}{4} = 0.53060$

$x_2 = g(x_1) = \frac{3 - \cos(0.53060)}{4} = 0.53437$

$x_3 = g(x_2) = \frac{3 - \cos(0.53437)}{4} = 0.53485$

$x_4 = g(x_3) = \frac{3 - \cos(0.53485)}{4} = 0.53491$

$x_5 = g(x_4) = \frac{3 - \cos(0.53491)}{4} = 0.53492$

$x_6 = g(x_5) = \frac{3 - \cos(0.53492)}{4} = 0.53492$

$\Big\}$ Alors, la racine est $x = 0.53492$ correcte à 5 décimales près.