

Note : Sur 8

X = Question supprimée.

MAT 1730, Automne 2016 Devoir 1  
Échéance Jeudi 22 Septembre 8:00pm.

Les devoirs en retard ne seront pas acceptés; ni les devoirs non agrafés. Les professeurs du département de mathématiques ne pourront pas vous prêter une agrafeuse; ne demandez pas une.

DGD à encercler:            DGD 1            DGD 2

Nom et prénom \_\_\_\_\_ Numéro d'étudiant \_\_\_\_\_

Nom et prénom \_\_\_\_\_ Numéro d'étudiant \_\_\_\_\_

Nom et prénom \_\_\_\_\_ Numéro d'étudiant \_\_\_\_\_

En signant ci-dessous, nous déclarons que ce travail est le nôtre et que nous n'avons pas copié à partir d'une autre source individuelle ou autre.

Signatures \_\_\_\_\_

9 pts

QUESTION 1. Pour toute fonction  $f$ , on note  $D_f$  son domaine de définition. Considérons les deux fonctions suivantes

$$f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad g(x) = \cot(x).$$

Trouver les domaines de définition des fonctions  $f$ ,  $g$ ,  $f \circ g$ , and  $g \circ f$ .

Réponse:

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} = \{x : x \neq -1\}$

1 pt

$\times D_g = \{x \in \mathbb{R} : x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq n\pi \text{ et } x \neq -\frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} \setminus \{n\pi, -\frac{\pi}{4} + n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$

1 pt

$\times D_{g \circ f} =$  \_\_\_\_\_

2 pts

QUESTION 2. (a) Résoudre l'inégalité suivante:

$$\left| \frac{2}{5x^2 + 6x + 7} \right| < \frac{1}{3}$$

(Réponse: 0,5 pt)  
(Démarche: 0,5 pt)

Réponse:  $S = ]-\infty, -1[ \cup ]-\frac{1}{5}, +\infty[ = \{x : x < -1 \text{ ou } x > -\frac{1}{5}\}$

Pour tout  $x$ , on a  $5x^2 + 6x + 7 > 0$  car son discriminant  $\Delta = 6^2 - 4 \times 5 \times 7 = -104 < 0$ . Donc  $\left| \frac{2}{5x^2 + 6x + 7} \right| < \frac{1}{3}$  équivaut à  $5x^2 + 6x + 7 > 6$  dmc  $5x^2 + 6x + 1 > 0$ . Le signe de ce polynôme quadratique:  $\Delta = 6^2 - 4 \times 5 \times 1 = 4^2$ ;  $x_1 = \frac{-6+4}{2 \times 5} = -\frac{1}{5}$  et  $x_2 = \frac{-6-4}{-10} = -1$

$x$	$-\infty$	$-1$	$-\frac{1}{5}$	$+\infty$
$5x^2 + 6x + 1$		+	-	+

(b) Résoudre l'inégalité suivante:

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$$

(Réponse: 0,5 pt)  
(Démarche: 0,5 pt)

Réponse:  $S = ]-\infty, -3[ \cup ]-2, 1[ = \{x : x < -3 \text{ ou } -2 < x < 1\}$

L'inéquation est définie si  $x+1 \neq 0$  et  $x^2 + 4x + 3 \neq 0$ ; i.e.  $x \neq -1$  et  $x \neq -3$ .

On a  $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$  équivaut à  $\frac{1}{x^2 + 4x + 3} - \frac{1}{x+1} > 0$

i.e.  $\frac{-x^2 - 3x - 2}{(x+1)(x^2 + 4x + 3)} > 0$ ; donc  $-\frac{(x+2)}{(x+1)(x+3)} > 0$

Le signe de cette expression est:

$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$-1$	$+\infty$
$-\frac{(x+2)}{(x+1)(x+3)}$		+	-	+	-

X QUESTION 3. Supposons qu'une population de bactéries est surveillée quotidiennement. Son volume est multiplié par le même nombre chaque jour. Par conséquent, le volume  $V_t$  au jour  $t$  satisfait au système dynamique discret

$$V_{t+1} = rV_t.$$

X Supposons que le volume initial est  $V_0 = 8\text{ml}$  et le volume au jour 17 est  $V_{17} = 16\text{ml}$ .  
(a) Trouvez la valeur de  $r$ .

X Réponse:

(b) À quel jour le volume sera égal à 64ml?

X Réponse:

4pts

QUESTION 4. Supposons que lorsque vous avez terminé vos études et il est temps de rembourser vos prêts, vous avez une dette de \$ 100,000 \$. À partir de maintenant, chaque mois, la banque ajoute 0,5 % de la valeur actuelle de l'intérêt. À la fin de chaque mois, vous payez 1000 \$. Vous recevez un relevé mensuel de la valeur restante de votre prêt, notée  $L_t$ , immédiatement après votre  $t$ -ième paiement. (En particulier,  $L_0 = 100,000$ .)

(a) Écrire l'équation du système dynamique discret (SDD) pour  $L_t$  et la fonction d'itération.

Le SDD est:  $L_{t+1} = 1.005L_t - 1000$

(Idée: 0,5pt)  
(Réponse: 0,5pt)

La fonction d'itération est:  $f(L) = 1.005L - 1000$

(b) Lorsque vous recevez le relevé pour  $L_{16}$ , vous réalisez que vous avez perdu le relevé pour  $L_{15}$ . Trouvez la formule qui calcule  $L_{15}$  à partir de  $L_{16}$ .

(Idée: 0,5pt)  
(Réponse: 0,5pt)

$L_{16} = 1,005L_{15} - 1000$

Donc  $L_{15} = \frac{L_{16} + 1000}{1,005}$

$L_{15} = \frac{L_{16} + 1000}{1,005}$

(c) Écrire la formule générale de la solution du SDD .

1pt

Réponse:  $L_t = 100\,000(2 - (1,005)^t)$   $t=0,1,2,\dots$

(d) Combien de mois faut-il pour rembourser la totalité du prêt? Calculer le plus petit  $t$  pour lequel  $L_t \leq 0$ .

1pt

$L_t \leq 0 \Leftrightarrow 100\,000(2 - (1,005)^t) \leq 0$

Donc  $(1,005)^t \geq 2$  ; d'où  $t \geq 138,975$  et  $t$  un entier.

Donc  $t = 139$

Réponse:  $139$  mois

~~(e) Votre banque modifie ses méthodes de diffusion: Pour économiser de l'argent, ils envoient seulement un relevé tous les deux mois. Votre calendrier de paiement ne change pas. Trouvez la fonction d'itération correspondante.~~

~~Réponse:  $L_{t+2} =$  [ ]~~