



## 1. Dérivée

### 1.1. Dérivée en un point

#### Rappel : Taux de variation instantané

Soit une fonction  $y = f(x)$ , alors le taux de variation instantané de  $y$  en un point  $(a, f(a))$  est donné par

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Cette limite représente la pente de la tangente à  $f$  en  $x = a$ .

#### Définition 1

$f$  est **dérivable en  $a$**  si le **taux d'accroissement**  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  a une limite finie lorsque  $h$  tend vers 0. La limite s'appelle alors le **nombre dérivé** de  $f$  en  $a$  et est noté  $f'(a)$ . Ainsi

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

#### Exemple 1

Calculons la dérivée de la fonction définie par  $f(x) = x^2$  en  $x = a$ .

On peut utiliser la première définition du taux de variation moyen pour calculer la dérivée.

#### Définition 2

$f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et est finie.

**Exemple 2**

La dérivée de  $f(x) = x^2$  en  $x = a$  se calcule par

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = 2a$$

**Notation** : dans le cadre de ce cours, on utilisera  $f'(x)$ ,  $\frac{df}{dx}$ ,  $\frac{df}{dx}\Big|_{x=a}$ ,  $y'$ ,  $\frac{dy}{dx}$  ou  $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=a}$

**1.2. Dérivée sur un intervalle**

Si la limite précédente existe pour tous les points  $a$  qui appartiennent au domaine de définition de  $f(x)$ , on dit alors que  $f(x)$  est dérivable sur tout son domaine de définition. En d'autres termes, on pourrait trouver la dérivée de  $f$  en n'importe quel point  $x$  dans son domaine de définition.

**Définition 3**

$f$  est **dérivable sur son domaine**  $D_f$  si  $f$  est dérivable en tout point  $a \in D_f$ . La fonction  $f'(x)$  est la **fonction dérivée** de  $f$ , elle se note  $f'$  ou  $\frac{df}{dx}$ . Ainsi, si elle existe

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

**Exercice 1**

Utiliser la définition de la dérivée pour trouver la dérivée de  $f(x) = \frac{1}{x}$

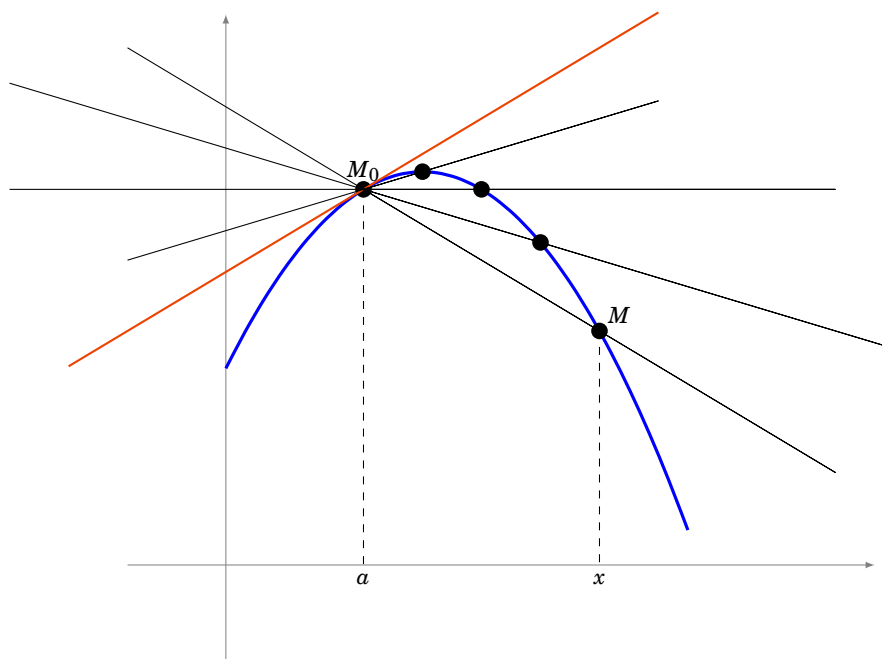
**Exercice 2**

Utiliser la définition de la dérivée pour trouver la dérivée de  $f(x) = 2x - 1$

### 1.3. La tangente

La droite qui passe par les points distincts  $(a, f(a))$  et  $(x, f(x))$  a pour pente  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ . À la limite on trouve que la pente de la tangente est  $f'(a)$ . Une équation de la **tangente** au point  $(a, f(a))$  est donc :

$$y = (x - a)f'(a) + f(a)$$



#### Mini-exercices

1. Utiliser la définition de la dérivée pour trouvez la pente de la droite tangente de  $f(x) = 1 - 2x^2$  en n'importe quel point  $x$ .
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de  $f$  au point  $x = -1$ .

## 1.4. Continuité et dérivabilité

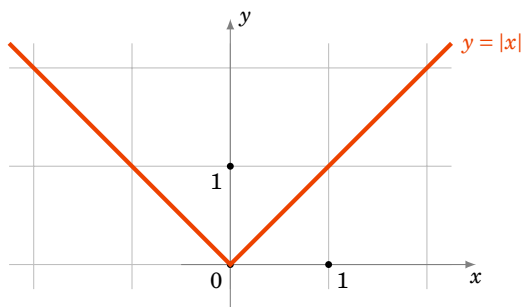
### Proposition 1

Soit  $f(x)$  une fonction définie dans son domaine  $D_f$  et soit  $x_0 \in D_f$ .

- Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  alors  $f$  est continue en  $x_0$ .
- Si  $f$  est dérivable sur  $D_f$  alors  $f$  est continue sur  $D_f$ .
- Si  $f$  n'est pas continue en  $x_0$  alors  $f$  n'est pas dérivable en  $x_0$

### Remarque

La réciproque est **fausse** : par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.



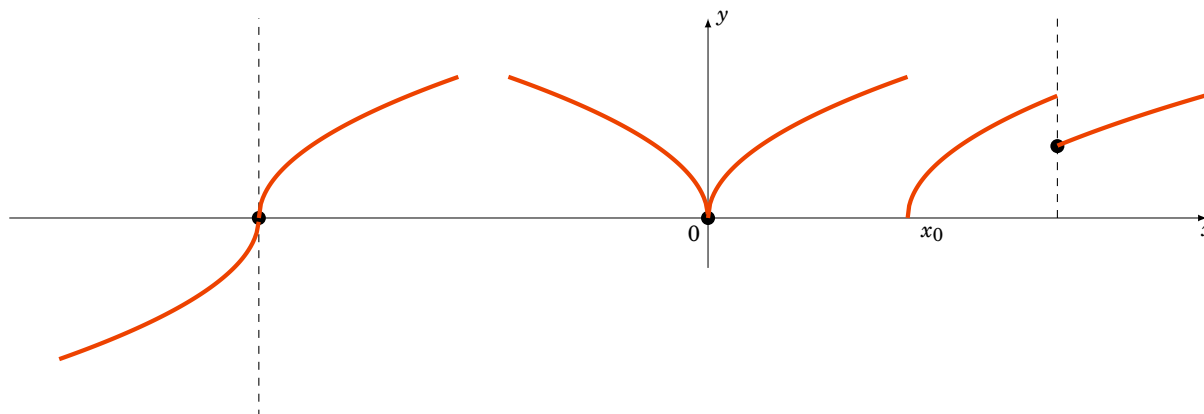
En effet, la pente de  $f(x) = |x|$  en  $x_0 = 0$  vérifie :

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Il y a bien une limite à droite (qui vaut +1), une limite à gauche (qui vaut -1) mais elles ne sont pas égales : il n'y a pas de limite en 0. Ainsi  $f$  n'est pas dérivable en  $x = 0$ .

Cela se lit aussi sur le dessin il y a une demi-tangente à droite, une demi-tangente à gauche mais elles ont des pentes différentes.

**En fait, vous ne pouvez pas calculer la dérivée aux points, où la fonction a une tangente verticale, a des coins ou n'est pas continue**



## 2. Les règles de dérivation

### 2.1. Somme, produit,...

La proposition suivante nous énumère quelques formules de dérivation pour les opérations sur les fonctions. Ainsi, nous serons en mesure de décomposer les fonctions complexes puis les dériver.

#### Proposition 2

Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivables sur  $I$ . Alors pour tout  $x \in I$  :

1.  $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ ,
2.  $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$  où  $\lambda$  est un réel fixé,
3.  $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ ,
4.  $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$  (si  $f(x) \neq 0$ ),
5.  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$  (si  $g(x) \neq 0$ ).

### 2.2. La dérivée de fonctions usuelles

Ici, nous explorons quelques formules de dérivation de fonctions usuelles.

Le tableau de gauche est un résumé des principales formules à connaître, où  $x$  est une variable.

Le tableau de droite est celui des compositions, où  $u$  représente une fonction  $u(x)$ .

Fonction	Dérivée
$x^n$	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
$e^x$	$e^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	Dérivée
$u^n$	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u^\alpha$	$\alpha u'u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
$e^u$	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\log_a(u)$	$\frac{u'}{u \ln a}$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\tan u$	$u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

**Remarque**

Si vous devez dériver une fonction avec un exposant dépendant de  $x$  il faut **absolument repasser** à la forme exponentielle. Par exemple si  $f(x) = 2^x$  alors on réécrit d'abord

$$f(x) = e^{\ln 2^x} = e^{x \ln 2}$$

pour pouvoir calculer  $f'(x) = (\ln 2x)' \cdot e^{x \ln 2} = \ln 2 \cdot e^{x \ln 2} = \ln 2 \cdot 2^x$ .

**Exemple 3**

$$1. \frac{d}{dx} \left( \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}} \right) = \frac{d}{dx} (x^{\frac{3}{2}x^{-\frac{2}{3}}}) = \frac{d}{dx} (x^{\frac{5}{6}}) = \frac{5}{6} x^{\frac{5}{6}-1} = \frac{5}{6} x^{-\frac{1}{6}} = \frac{5}{6x^{\frac{1}{6}}}$$

$$2. \frac{d}{dx} \ln(3x^2) = \frac{(3x^2)'}{3x^2} = \frac{3(x^2)'}{3x^2} = \frac{3 \cdot 2x}{3x^2} = \frac{2}{x}$$

Autre méthode plus facile, on a :  $\ln(3x^2) = \ln 3 + \ln x^2 = \ln 3 + 2 \ln x$

$$\text{donc,} \quad \frac{d}{dx} \ln(3x^2) = \frac{d}{dx} (\ln 3) + 2 \frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{2}{x}$$

**Exercice 3**

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$1. f(x) = \frac{3x}{4} + \tan x - \log_3 x$$

$$2. g(s) = (x^2 + 1)(2x + 5)$$

$$3. V(x) = \frac{4x^3}{x^2 + 1}$$

**Mini-exercices**

Soit la fonction  $f(x) = x \cos x$

- a) Déterminer le domaine de  $f$ .
- b) Trouver les zéros de  $f(x)$ .
- c) Quelle est l'équation de la droite tangente à  $f(x)$  en  $x = \pi$  ?
- d) Quelle est l'équation de la droite perpendiculaire à la tangente en  $x = \pi$  ?

## 2.3. Composition

### Proposition 3

Si  $f$  est dérivable en  $x$  et  $g$  est dérivable en  $f(x)$  alors  $g \circ f$  est dérivable en  $x$  de dérivée :

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

### Exemple 4

Calculons la dérivée de  $\ln(1+x^2)$ . Nous avons  $g(x) = \ln(x)$  avec  $g'(x) = \frac{1}{x}$  ; et  $f(x) = 1+x^2$  avec  $f'(x) = 2x$ . Alors la dérivée de  $\ln(1+x^2) = (g \circ f)(x)$  est

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(1+x^2) \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}.$$

### Exercice 4

Appliquer la dérivation de fonctions composées pour dériver

1.  $\sin(\cos x)$

2.  $(\log_2 x)^2$

### Corollaire 1

Soit  $f$  une fonction dérivable et admet une réciproque  $f^{-1}$ . Si  $f'$  ne s'annule pas sur  $D_f$  alors  $f^{-1}$  est dérivable et on a :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Comment procéder pour déterminer la dérivée d'une fonction réciproque :

Il suffit de calculer  $\mathbf{f}'(\mathbf{y})$  puis exprimer  $(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}))' = \frac{1}{\mathbf{f}'(\mathbf{y})}$  en fonction de  $\mathbf{y}$  sachant  $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ , puis en fonction de  $\mathbf{x}$ .

**Exemple 5**

Calculons la dérivée de la fonction Arccosinus. Nous savons que

$$\text{si } y = f^{-1}(x) = \text{Arccos } x \text{ alors, on a } x = \cos y = f(y)$$

Donc,

$$(\text{Arccos } x)' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

**Exercice 5**

Trouver la dérivée de la fonction  $y = \text{Arcsin}(x)$

**2.4. Les dérivées d'ordres supérieurs**

Il est possible de calculer la dérivée de la dérivée d'une fonction s'il existe. Par exemple, soit

$$f(x) = \sin(x^2), \text{ alors } f'(x) = 2x \cos(x^2) \text{ et } f''(x) = 2 \cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2).$$

En générale, la dérivée n-ième d'une fonction  $f(x)$  sera notée par :

$$f^{(n)}(x), \frac{d^n f}{dx^n}, y^{(n)}, \frac{d^n y}{dx^n}$$

**Exemple : Le déplacement, la vitesse et l'accélération**

Pour obtenir la vitesse  $v(t)$ , il faut dériver la fonction position  $x(t)$  par rapport au temps et pour obtenir l'accélération  $a(t)$ , il faut dériver la fonction vitesse  $v(t)$  par rapport au temps.

Ainsi,

- $x(t)$ , en  $m$ , est la fonction position
- $v(t) = x'(t)$ , en  $m/s$  est la fonction vitesse
- $a(t) = v'(t) = x''(t)$ , en  $m/s^2$  est la fonction accélération

Si le déplacement d'un objet se fait horizontalement sur une ligne droite, alors

- si  $v(t) > 0$  l'objet se déplace à droite de sa position initiale
- si  $v(t) < 0$  l'objet se déplace à gauche de sa position initiale
- si  $v(t) = 0$  l'objet est soit complètement arrêté, soit momentanément arrêté en changeant de direction.

Aussi,

- si  $a(t) > 0$  la vitesse de l'objet diminue
- si  $a(t) < 0$  la vitesse de l'objet augmente
- si  $a(t) = 0$  la vitesse de l'objet est constante

### Exercice 6

Un travailleur de la construction échappe accidentellement un marteau, d'une hauteur de 90 m, alors qu'il travaille sur le toit d'un nouvel immeuble d'habitation. La hauteur du marteau, en mètres, après  $t$  secondes, est modélisée par la fonction  $s(t) = 90 - 4,9t^2$ .

- Déterminer la vitesse du marteau à la première seconde. Explique l'importance du signe.
- À quel moment le marteau atteindra-t-il le sol ?
- Détermine la fonction accélération ? Interprète ton résultat.

## 2.5. Règle de dérivation en chaîne et notation de Leibniz

La règle de dérivation en chaîne s'utilise pour calculer la dérivée d'une fonction composée.

Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions, alors leur **composition**, dénotée  $f \circ g$ , est définie comme  $f(g(x))$ .

### Théorème

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables.

Si  $H(x) = (f \circ g)(x)$ , c'est-à-dire  $H(x) = f(g(x))$ , alors

$$H'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

**Notation de Leibniz** : Soit  $y = f(u)$  et  $u(x)$  deux fonctions dérivables. Selon la notation de Leibniz, la règle de dérivation en chaîne peut s'écrire comme

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx}, \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx}$$

Ainsi, si  $H(x) = f(g(x))$ , alors  $\frac{dH}{dx} = \frac{dH}{dg} \frac{dg}{dx}$

**Démonstration . Dérivation en chaîne :**

Afin de simplifier la notation, nous utiliserons la définition :

$$\frac{df}{dx} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Donc,

$$\frac{dH}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta H}{\Delta g} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta H}{\Delta g} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

Puisque  $g$  est une fonction de  $x$  dérivable, si  $\Delta x \rightarrow 0$ , alors  $\Delta g \rightarrow 0$ . Ainsi,

$$\frac{dH}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta H}{\Delta g} \cdot \lim_{\Delta g \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{dH}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} \quad \text{par définition.}$$

**Exemple 6**

À l'aide de dérivation en chaîne, détermine la dérivée de  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ,

On pose  $u(x) = 4 - x^2$ , alors la fonction  $f$  s'écrit comme  $f(x) = \sqrt{u}$ , d'où

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

**Exercice 7**

Calculer la dérivée de la fonction  $f(x) = \left(\frac{x^2}{2-x^3}\right)^3$  et  $g(x) = \ln(\sin x)$

La règle de dérivation en chaîne se généralise à plusieurs fonctions. Par exemple, la fonction définie par  $y = f(g(h(x)))$  peut être décomposée comme suit :

$$y = f(u), \quad u = g(v) \quad \text{et} \quad v = h(x)$$

Dans ce cas, la dérivée aura la forme suivante :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

**Remarque : sur les dérivées**

1. Si une fonction est définie sur un intervalle fermé  $[a, b]$ , alors la dérivée de la fonction n'existe pas aux extrémités de cet intervalle.

**Exemple :** Soit la fonction  $y = \sqrt{4 - x^2}$ .

- a. Déterminer le domaine de définition de cette fonction

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 4 - x^2 \geq 0\} = \{x^2 \leq 4\} = \{|x| \leq 2\} = \{-2 \leq x \leq 2\} = [-2, 2]$$

- b. Calculer la dérivée  $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (\sqrt{4 - x^2}) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

- c. Déterminer le domaine de définition de  $\frac{dy}{dx}$

$$D_{\frac{dy}{dx}} = \{x \in \mathbb{R} : 4 - x^2 > 0\} = \{|x| < 2\} = \{-2 < x < 2\} = ]-2, 2[$$

La dérivée n'existe jamais aux extrémités d'un intervalle fermé. C'est pour cela que  $x = -2$  et  $x = 2$  ne sont pas dans le domaine de la dérivée.

2. Le domaine de définition de la dérivée d'une fonction doit être inclus dans le domaine de définition de la fonction.

**Exemple :** Soit la fonction  $y = \ln x$ .

- a. Déterminer le domaine de définition de cette fonction

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = ]0, \infty[$$

- b. Calculer la dérivée  $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x}$$

- c. Déterminer le domaine de définition de  $\frac{dy}{dx}$

Pour déterminer le domaine de  $\frac{dy}{dx}$ , il ne faut pas oublier le contexte, c'est-à-dire que le domaine de la dérivée d'une fonction doit être inclus dans le domaine de la fonction. Dans ce cas-ci,

$$D_{\frac{dy}{dx}} = ]0, \infty[$$

**Auteur**

Rachid Bentoumi