Faculté des sciences »
Département de mathématiques et de statistique

MAT 1741 C – Test 1 – Diagnostique - V1 - SOLUTION

Le 21 septembre 2015. Durée: 80 minutes.
Professeur: Abdelkrim El basraoui.

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

1	E
2	E
3	A
4	E
5	B
6	C
7	C
8	C
9	A
10	C
11	A
12	A
Total	

Nom de famille:______________________ Prénom:______________________
Numéro d'étudiant(e):____________________

VEUILLEZ LIRE CES INSTRUCTIONS TRÈS ATTENTIVEMENT:

1. Vous avez 80 minutes pour écrire cet examen.
2. Vous n'avez le droit de consulter ni vos notes ni aucun livre. Les calculatrices ou tout autre gadget electronique **ne** sont **pas autorisés.**
3. Les questions sont à choix multiples. Elles valent 1 point chacune. Il n'y a pas de crédit partiel. Veuillez inscrire vos réponses sur CETTE page.
4. Lisez bien les énoncés des questions avant de commencer et vérifiez vos réponses si cela est possible.
5. Bonne chance!!

1. Trouver une équation du plan qui contient les deux droites d'équations paramétriques $x = -1 + t,\ y = -1 - t,\ z = 1 + 3t$ et $x = -3 - s,\ y = 3 + 2s,\ z = 7 + 3s$.

A. $7x - 11y + 2z = 6$

B. $11x - 2y + 9z = 0$

C. $6x - 2y + z = -3$

D. $3x - 6y + z = 4$

E. $9x + 6y - z = -16$

F. $9x + 6y + z = -14$

Solution: On a le vecteur normal à ce plan est $\vec{n} = (1, -1, 3) \times (-1, 2, 3) = (-9, -6, 1)$. Donc avec le point du plan $(-1, -1, 1)$ on a l'équation

$$(-9)(x - (-1)) + (-6)(y - (-1)) + (1)(z - 1) = 0 \iff 9x + 6y - z = -16\,.$$

2. Une équation du plan passant par les points $A = (0, -3, 0)$ et $B = (-1, 1, 2)$ et qui est parallèle à l'axe des x est donnée par:

A. $3x + 2y + 7z = -6$

B. $2x - y = 3$

C. $x - y + z = 3$

D. $x - z = 0$

E. $y - 2z = -3$

F. $x + y + z = -3$

Solution: Un vecteur normal à ce plan est $\vec{AB} \times \vec{i} = (0, 2, -4)$ et on utilise l'un des 2 points pour trouver la constante dans l'équation cartésienne. On obtient donc $y - 2z = -3$.

3. Trouver une équation du plan qui passe par le point $(1,\ 1,\ 1)$ et qui est perpendiculaire à la droite dont les équations paramétriques sont données par:

$$x = -6 + 2t,\ y = 1 - 4t,\ z = -3 + 3t;\ t \in \mathbb{R}.$$

A. $2x - 4y + 3z = 1$

B. $2x + 4y + 3z = 9$

C. $6x + y - 3z = 2$

D. $2x - 4y + 3z = -25$

E. $2x - 4y + 3z = -10$

F. $2x - 4y + 3z = 10$

Solution: Un vecteur normal à ce plan est $(2, -4, 3)$ et on utilise le point donné pour trouver la constante dans l'équation cartésienne. On obtient donc $2x - 4y + 3z = 1$.

4. Les équations paramétriques de la droite contenant les points $A = (2,\ -2,\ 3)$ et $B = (-2,\ 4,\ 0)$ sont données par:

A. Une telle droite n'existe pas.

B. $x = 2 - 2t,\ y = -2 + 4t,\ z = 3;\ t \in \mathbb{R}$.

C. $x = 1 - t,\ y = -1 - 6t,\ z = 4 + 3t;\ t \in \mathbb{R}$.

D. $x = 3 + 4t,\ y = -1 - 6t,\ z = 6 + t;\ t \in \mathbb{R}$.

E. $x = 2 + 4t,\ y = -2 - 6t,\ z = 3 + 3t;\ t \in \mathbb{R}$.

F. $x = -2 + 4t,\ y = 4 + 6t,\ z = 1 + 3t;\ t \in \mathbb{R}$.

Solution: Un vecteur directeur à cette droite est $\vec{BA} = (4, -6, 3)$ et on utilise l'un des points donnés obtenir les équations paramétrique, par exemple A. On obtient donc $x = 2 + 4t,\ y = -2 - 6t,\ z = 3 + 3t;\ t \in \mathbb{R}.$.

5. Parmi les choix ci-dessous, trouver l'équation cartésienne du plan dont les équations paramétriques sont données par

$$v = (0, 2, -2) + s(1, -1, 2) + t(2, -4, -1); s, t \in \mathbb{R}.$$

A. $4x - 9y + 6z = -30$

B. $9x + 5y - 2z = 14$

C. $9x - 5y + 2z = -14$

D. $9x + 5y + 2z = 6$

E. $9x + 2y + 5z = -6$

F. $9x - 2y + 5z = -14$

Solution: Un vecteur normal à ce plan est $(1, -1, 2)\times(2, -4, -1) = (9, 5, -2)$ et on utilise le point donné $(0, 2, -2)$ pour trouver la constante dans l'équation cartésienne. On obtient donc $9x + 5y - 2z = 14$.

6. Trouver **tous** les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont perpendiculaires aux deux vecteurs $(-1, 1, 5)$ et $(2, 1, 2)$.

A. $\{(2,\ -8,\ 2)\}$

B. $\{(t+1,\ -8,\ t+1) |\ t \in \mathbb{R}\}$

C. $\{(t,\ -4t,\ t) |\ t \in \mathbb{R}\}$

D. $\{(-t,\ 0,\ t) |\ t \in \mathbb{R}\}$

E. $\{(0,\ 0,\ 0)\}$

F. $\{(3,\ -12,\ 3)\}$

Solution: Un vecteur normal à ces deux vecteurs sont les vecteurs colinéaires avec $(-1, 1, 5)\times(2, 1, 2) = (-3, 12, -3) = -3(1, -4, 1)$, soit les vecteurs $\{(t,\ -4t,\ t) |\ t \in \mathbb{R}\}$.

7. Soit un triangle T de sommets $A = (1,\ 1,\ 1)$, $B = (2,\ 3,\ 1)$ et $C = (1,\ 2,\ 3)$. Trouver le cosinus de l'angle en A de T.

A. 0

B. 1/5

C. 2/5

D. 3/5

E. 4/5

F. 1

Solution: Utilisez le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\| \cos(\theta) = 2 \iff \cos(\theta) = 2/5$.

8. Considérons la droite L qui passe par le point $(2,\ 1,\ 0)$ et qui est parallèle au vecteur $u = (1,\ -1,\ 2)$. Trouver le point d'intersection de L avec le plan d'équation $x + y + 2z = 23$.

A. $(11,\ 4,\ 4)$

B. $(2,\ 1,\ 10)$

C. $(7,\ -4,\ 10)$

D. $(7,\ 4,\ 6)$

E. $(11,\ 1,\ 4)$

F. $(10,\ -4,\ 7)$

Solution: Les équations paramétriques de la droite sont $x = 2 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$, $t \in \mathbb{R}$. On substitue dans l'équation du plan pour trouver t. On a donc $t = 5$ puis on remplace dans les équations paramétriques pour trouver les coordonnées du point d'intersection, soit le point $(7,\ -4,\ 10)$.

9. Si $u = (3,\ 3,\ 6)$ et $v = (2,\ -1,\ 1)$, déterminer la longueur de la projection orthogonale de u sur v.

A. $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

B. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

C. 0

D. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

E. $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

F. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Solution: La projection de u sur v est

$$proj_v(u) = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v \implies \|proj_v(u)\| = \frac{|u \cdot v|}{\|v\|} = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

10. Quelle est l'aire du triangle dont les sommets sont $P = (3,\ -1,\ 2)$, $Q = (1,\ 1,\ 0)$ et $R = (1,\ 2,\ -1)$?

A. 4

B. $2\sqrt{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. 0

E. $4\sqrt{2}$

F. 2

Solution: L'aire est

$$\frac{1}{2}\|\vec{PQ} \times \vec{PR}\| = \frac{1}{2}\|(0, 2, -2)\| = \sqrt{2}.$$

11. Exprimer sous forme cartésienne (c'est-à-dire sous la forme $a + b\ i$) le nombre complexe

$$\frac{(1+3\,i)\,(5+10\,i)}{4+3\,i}.$$

A. $-1+7\,i$

B. -1

C. $1+7\,i$

D. $7\,i$

E. $-5+35\,i$

F. $-\frac{1}{5}+\frac{7}{5}\,i$

Solution: On a

$$\frac{(1+3\,i)\,(5+10\,i)}{4+3\,i} = \frac{(-25+25\,i)}{4+3\,i} = \frac{(-25+25\,i)(4-3\,i)}{4^2+3^2} = \frac{25(-1+7\,i)}{25} = -1+7\,i\,.$$

12. Quelle est la forme polaire du nombre complexe $\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}{3+3\sqrt{3}\,i}$?

A. $\frac{1}{3}(\cos(5\pi/12)+i\sin(5\pi/12))$

B. $\frac{1}{3}(\cos(5\pi/12)-i\sin(5\pi/12))$

C. $3(\cos(5\pi/12)-i\sin(5\pi/12))$

D. $3(\cos(5\pi/12)+i\sin(5\pi/12))$

E. $\cos(11\pi/12)+i\sin(11\pi/12)$

F. $\cos(5\pi/12)+i\sin(5\pi/12)$

Solution: On calcule la forme polaire pour chaque nombre complexe. On a pour $-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$ l'argument est $3\pi/4$ et le module est 2. De même on a pour $3+3\sqrt{3}\,i$ l'argument est $\pi/3$ et le module est 6. Donc pour le quotient on a

$$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}{3+3\sqrt{3}\,i} = \frac{2}{6}\left(\cos(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3})+i\,\sin(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3})\right) = \frac{1}{3}\left(\cos(\frac{5\pi}{12})+i\,\sin(\frac{5\pi}{12})\right)\,.$$

(Cette page est laissée intentionnellement blanche)