I. Fonctions de plusieurs variables

1. Normes

Dans ce cours, on travaillera principalement avec
$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \,;\; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$
On écrit généralement les éléments $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ comme des vecteurs-lignes $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ mais il est souvent commode de les écrire sous forme de vecteurs-colonnes, c'est-à-dire
$$\vec{x}^{\,t} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
où $\vec{x}^{\,t}$ désigne la <u>transposée</u> de $\vec{x}$.

Ce point de vue est très concret. Cependant, pour beaucoup d'applications notamment en physique, il est important de développer des concepts qui ne dépendent pas d'un système de coordonnées. Or, $\mathbb{R}^n$ vient avec un système de coordonnées privilégié, associé à la base canonique $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$.

Un cadre plus général est donné par les espaces vectoriels réels de dimension finie. Tout espace vectoriel réel V de dimension n s'identifie à $\mathbb{R}^n$ par le choix d'une base mais il n'y a pas de base privilégiée de V à priori. On tâchera autant que possible de donner les définitions dans ce cadre mais, pour les exemples, on travaillera presque toujours avec $\mathbb{R}^n$.

<u>Définition</u> 1.1 Soit V un espace vectoriel réel. Une <u>norme</u> sur V est une fonction

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{v} &\longmapsto \|\vec{v}\| \end{aligned}$$

qui possède les propriétés suivantes

- 1) $\|\vec{v}\| \geq 0$ pour tout $\vec{v} \in V$
- 2) $\|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$
- 3) $\|a\vec{v}\| = |a|\,\|\vec{v}\|$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\vec{v} \in V$
- 4) $\|\vec{v}+\vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ pour tous $\vec{v}, \vec{w} \in V$.

<u>Exemple</u> 1.2. Pour tout $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit

- $\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$
- $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$
- $\|\vec{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$

Montrez que $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$. On les appelle respectivement la norme L_1, la norme L_2 ou <u>norme euclidienne</u> et la norme L_∞ ou <u>norme du maximum</u>.

<u>Définition 1.3</u> Soient $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ des normes sur un espace vectoriel réel V. On dit que $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ sont <u>équivalentes</u> s'il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$\boxed{c_1 \|\vec{v}\|_1 \leq \|\vec{v}\|_2 \leq c_2 \|\vec{v}\|_1} \quad \forall \vec{v} \in V.$$

Le résultat suivant n'est pas très difficile à démontrer mais on l'acceptera sans démonstration.

<u>Théorème 1.4</u> Si V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie, alors toutes les normes sur V sont équivalentes.

En particulier, toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

<u>Exercice 1.1</u>. Montrez que, pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\boxed{\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_1 \leq n \|\vec{x}\|_\infty}$$

donc $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_1$ sont équivalentes.

De même, montrez que

$$\boxed{\|\vec{x}\|_\infty \leqslant \|\vec{x}\|_2 \leqslant \sqrt{n}\,\|\vec{x}\|_\infty \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n}$$

donc $\| \, \|_\infty$ et $\| \, \|_2$ sont équivalentes.

Exercice 1.2. Déterminez des inégalités liant de la même façon $\|\vec{x}\|_1$ et $\|\vec{x}\|_2$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

2. Distance

Définition 2.1 Soit V un espace vectoriel réel muni d'une norme $\| \, \|$. On définit la distance entre des éléments $\vec{v}, \vec{w}$ de V par

$$d(\vec{v},\vec{w}) = \|\vec{v}-\vec{w}\|.$$

Exercice 2.1. Montrez que

- 1) $d(\vec{v},\vec{w}) \geqslant 0 \quad \forall \vec{v},\vec{w} \in V$
- 2) $d(\vec{v},\vec{w}) = 0 \iff \vec{v} = \vec{w}$
- 3) $d(\vec{v},\vec{w}) = d(\vec{w},\vec{v}) \quad \forall \vec{v},\vec{w} \in V$
- 4) $d(\vec{u},\vec{w}) \leqslant d(\vec{u},\vec{v}) + d(\vec{v},\vec{w}) \quad \forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V.$

Exemple 2.2 Soient $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ des éléments de $\mathbb{R}^n$. La distance entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$ pour la norme du maximum est

$$d_\infty(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\|_\infty = \max\{|x_1-y_1|,\dots,|x_n-y_n|\}.$$

On l'appelle la <u>distance du maximum</u> entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

La distance entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$ pour la norme euclidienne est

$$d_2(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\|_2 = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}.$$

On l'appelle la <u>distance euclidienne</u> entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

Pour $n=1,2,3$, elle représente la distance usuelle entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$, c'est-à-dire la longueur du vecteur qui lie ces deux points.

<u>Définition 2.3</u>. Soit V un espace vectoriel réel muni d'une norme, soit $\vec{v}\in V$ et soit $r\geq 0$. On définit la boule de V de centre $\vec{v}$ et de rayon r par

$$B(\vec{v},r)=\{\vec{w}\in V;\ \|\vec{v}-\vec{w}\|\leq r\}.$$

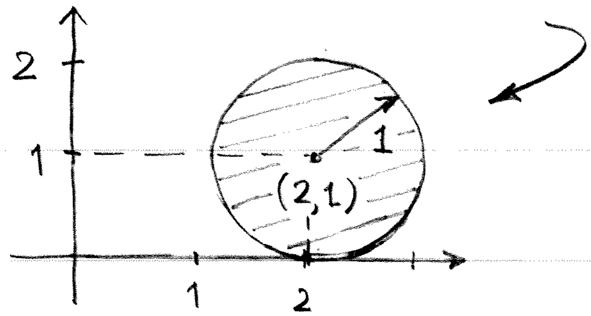
<u>Exemple 2.4</u>. La <u>boule du maximum</u> de $\mathbb{R}^n$ de centre $\vec{a}=(a_1,\dots,a_n)$ et de rayon $r\geq 0$ est

$$\boxed{B_\infty(\vec{a},r)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n;\ \|\vec{x}-\vec{a}\|_\infty\leq r\}.}$$

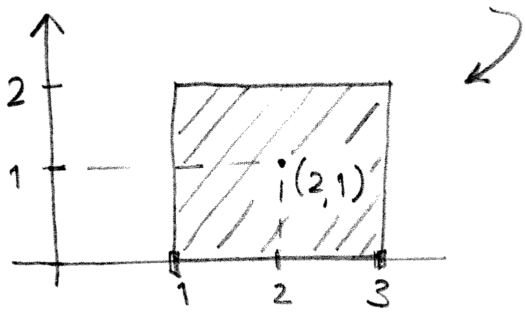
La <u>boule euclidienne</u> de $\mathbb{R}^n$ de centre $\vec{a}$ et de rayon r est

$$\boxed{B_2(\vec{a},r)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n;\ \|\vec{x}-\vec{a}\|_2\leq r\}}$$

Ainsi, $B_2((2,1),1)$ = disque de rayon 1 centré en $(2,1)$:



tandis que $B_\infty((2,1),1)$ = carré de côté 2 centré en $(2,1)$:



Exercice 2.2. Montrez que

$$B_\infty\left(\vec{a}, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \subseteq B_2(\vec{a}, r) \subseteq B_\infty(\vec{a}, r) \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n, \forall r \geq 0.$$

Exercice 2.3. (i) Donnez une formule pour la distance L_1 entre deux points $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ et définissez la boule L_1 de centre $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r \geq 0$.

(ii) Dessinez $B_1((2,1),1)$.

(iii) Donnez des inclusions semblables à celles de l'exercice 2.2 liant les boules B_1 et B_∞ de même centre $\vec{a}$.

3. Topologie

On commence par l'observation suivante.

Lemme 3.1. Soit A un sous-ensemble d'un espace vectoriel réel V de dimension finie et soit $\vec{v} \in V$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe une norme sur V et un réel $r > 0$ tels que $B(\vec{v}, r) \subseteq A$.

(ii) Pour toute norme sur V il existe un réel $r > 0$ tel que $B(\vec{v}, r) \subseteq A$.

Preuve. Il suffit de montrer que (i) $\Rightarrow$ (ii). Pour cela, supposons que $\| \; \|_1$ et $\| \; \|_2$ soient deux normes sur V. Pour $i = 1, 2$, désignons par

$$B_i(\vec{v}, r) = \{ \vec{w} \in V ; \; \|\vec{v} - \vec{w}\|_i \leq r \}$$

la boule de centre $\vec{v}$ et de rayon r. Comme $\| \; \|_1$ et $\| \; \|_2$ sont équivalentes, il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que

$$c_1 \|\vec{w}\|_1 \leq \|\vec{w}\|_2 \leq c_2 \|\vec{w}\|_1 \quad \forall \vec{w} \in V$$

$$\Rightarrow \; B_1(\vec{v}, \tfrac{r}{c_2}) \subseteq B_2(\vec{v}, r) \subseteq B_1(\vec{v}, \tfrac{r}{c_1}) \quad \forall r \geq 0$$

Donc, s'il existe $r > 0$ tel que $B_2(\vec{v}, r) \subseteq A$, alors

$$B_1(\vec{v}, \tfrac{r}{c_2}) \subseteq B_2(\vec{v}, r) \subseteq A \quad \text{et} \quad \tfrac{r}{c_2} > 0. \qquad \blacksquare$$

<u>Définition 3.2</u>. Avec les notations du lemme 3.1, on dit que A est un voisinage de $\vec{v}$ si les conditions équivalentes du lemme sont remplies.

On dit que A est un <u>ouvert</u> de V si A est un voisinage de tous ses points i.e.

$$\boxed{A \text{ est un ouvert} \iff \forall \vec{a} \in A \ \exists r > 0 \text{ t.q. } B(\vec{a}, r) \subseteq A}$$

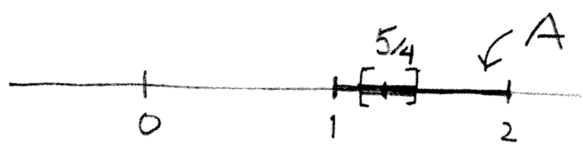
Cela ne dépend pas du choix de la norme sur V.

<u>Exemple 3.3.</u> Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^n$ est ouvert

$$\iff \forall \vec{a} \in A \ \exists r > 0 \text{ t.q. } B_\infty(\vec{a}, r) \subseteq A$$

$$\iff \forall \vec{a} \in A \ \exists r > 0 \text{ t.q. } B_2(\vec{a}, r) \subseteq A.$$

<u>Exemple 3.4.</u> $A = [1, 2]$ est un voisinage de $5/4$ dans $\mathbb{R}$ car $B_\infty(5/4, 1/8) = [9/8, 11/8] \subseteq A$:



Par contre A n'est pas ouvert car $1 \in A$ et $B_\infty(1, r) \not\subseteq A$ quel que soit $r > 0$ (car $1 - r \in B_\infty(1, r)$ et $1 - r \notin A$).

Prop. 3.5 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Les intervalles (a,b), $(-\infty, a)$, (a, ∞) et $\mathbb{R}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

Preuve. Soit $x \in (a,b)$. On a : $a < x < b$

$$\Rightarrow \exists r > 0 \text{ t.q. } a < x - r \text{ et } x + r < b$$

$$\Rightarrow B_\infty(x, r) = [x-r, x+r] \subset (a,b).$$

Donc (a,b) est un ouvert de $\mathbb{R}$. On procède de manière semblable pour les autres intervalles.

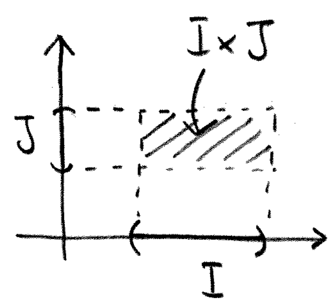
Donc tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$

Prop 3.6. Soient I, J des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Alors

$$I \times J = \{(x,y);\ x \in I,\ y \in J\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Preuve. Soit $(x,y) \in I \times J$. On a :



$$x \in I \Rightarrow \exists r > 0 \text{ t.q. } [x-r, x+r] \subseteq I$$

$$y \in J \Rightarrow \exists s > 0 \text{ t.q. } [y-s, y+s] \subseteq J.$$

On pose $t = \min\{r, s\} > 0$. Alors

$$B_\infty((x,y), t) = [x-t, x+t] \times [y-t, y+t]$$

$$\subseteq [x-r, x+r] \times [y-s, y+s] \subseteq I \times J.$$

<u>Définition 3.7</u> Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie. On dit qu'un sous-ensemble A de V est <u>fermé</u> si son complément $V \setminus A$ est ouvert, ie.

$$\boxed{A \text{ est fermé} \iff \forall \vec{v} \in V \text{ avec } \vec{v} \notin A,\ \exists r > 0 \text{ t.q. } B(\vec{v}, r) \cap A = \emptyset.}$$

<u>Exercice 3.1</u>. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. Montrez que $[a,b]$, $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$ et $\mathbb{R}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.

(ie. tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$)

<u>Exercice 3.2</u>. Soient I, J des intervalles fermés de $\mathbb{R}$. Montrez que $I \times J$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

<u>Exercice 3.3</u> Plus généralement, montrez que si $I_1, \dots, I_n$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$, alors $I_1 \times \dots \times I_n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. De même, si $I_1, \dots, I_n$ sont des fermés de $\mathbb{R}$, alors $I_1 \times \dots \times I_n$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

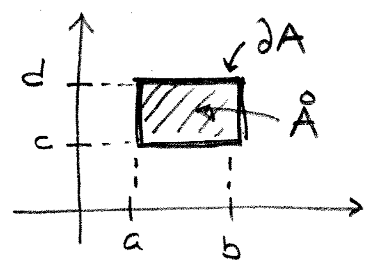
<u>Définition 3.8</u>. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie. On dit qu'un sous-ensemble A de V est <u>borné</u> s'il existe $R > 0$ tel que $A \subseteq B(\vec{0}, R)$ pour un choix de norme sur V (cette condition est indépendante du choix de la norme).

<u>Définition 3.9</u> Soit V comme ci-dessus et soit A un sous-ensemble de V.

- L'<u>intérieur</u> de A est l'ensemble $\mathring{A}$ des points de A dont A constitue un voisinage.
- L'<u>adhérence</u> de A est l'ensemble des points $\vec{v}$ de V tels que $B(\vec{v}, r) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $r > 0$.
- La <u>frontière</u> de A est $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.

<u>Exercice 3.4</u>. Soit $A = [0,1] \subset \mathbb{R}$. Montrez que $\mathring{A} = (0,1)$, $\bar{A} = [0,1]$ et $\partial A = \{0,1\}$.

<u>Exercice 3.5</u>. Soit $A = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $c < d$. Montrez que $\mathring{A} = (a,b) \times (c,d)$, $\bar{A} = A$ et $\partial A = \{a,b\} \times [c,d] \cup [a,b] \times \{c,d\}$.



<u>Exercice 3.6</u> Soit $A \subseteq V$ avec V comme ci-dessus. Montrez que $\mathring{A}$ est un ouvert de V, que $\bar{A}$ est un fermé de V, et que

$$\mathring{A} \subseteq A \subseteq \bar{A}.$$

Montrez que A est ouvert ssi $A = \mathring{A}$ et que A est fermé ssi $A = \bar{A}$.

4. Norme des applications linéaires

Soient V et W des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de dimension finie munis de normes respectives $\| \ \|_V$ et $\| \ \|_W$. L'ensemble $\mathcal{L}(V, W)$ des applications linéaires de V dans W est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et la proposition ci-dessous (sans démonstration) définit une norme sur cet espace.

Prop 4.1 Pour toute application linéaire $L : V \to W$ le nombre

$$\|L\| := \max_{\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}} \frac{\|L(\vec{v})\|_W}{\|\vec{v}\|_V}$$

est fini. La fonction $\begin{array}{rcl} \mathcal{L}(V,W) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ L & \longmapsto & \|L\| \end{array}$ ainsi définie est une norme sur $\mathcal{L}(V, W)$.

On a donc

$$\|L(\vec{v})\|_W \leqslant \|L\| \, \|\vec{v}\|_V \qquad \forall \vec{v} \in V$$

car pour $\vec{v} = \vec{0}$ les deux membres de l'inégalité sont nuls. De plus, $\|L\|$ est le plus petit nombre réel avec cette propriété.

Nous allons expliciter cette norme lorsque $V=\mathbb{R}^n$ et $W=\mathbb{R}^m$ sont munis de $\| \ \|_\infty$. La norme correspondante sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ est aussi notée $\| \ \|_\infty$.

On commence par un rappel.

<u>Rappel</u>. Pour toute application linéaire

$$\begin{aligned} \vec{L} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \vec{x} &\longmapsto \left(L_1(\vec{x}),\dots,L_m(\vec{x})\right) \end{aligned}$$

il existe une et une seule matrice $M=(c_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ telle que

$$\vec{L}(\vec{x})^t = M\,\vec{x}^{\,t} \qquad \forall \vec{x}\in\mathbb{R}^n$$

i.e.

$$(4.1)\qquad \boxed{\begin{pmatrix} L_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ L_m(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \forall \vec{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n}$$

On l'appelle la matrice de $\vec{L}$ (relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^m$ et de $\mathbb{R}^n$) et on la note $[\vec{L}]$.

De plus l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) &\longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}) \\ L &\longmapsto [L] \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

<u>Prop 4.2</u>. Soit $\vec{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire et soit $[\vec{L}] = (c_{ij})$ sa matrice. Alors on a

$$\|\vec{L}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \left(|c_{i1}| + \dots + |c_{in}| \right).$$

<u>Preuve</u>. Soit $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. La formule (4.1) livre

$$\begin{aligned}
\|\vec{L}(\vec{x})\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq m} |L_i(\vec{x})| \\
&= \max_{1 \leq i \leq m} \left| \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \right| \\
&\leq \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |c_{ij}|\,|x_j| \\
&\leq \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |c_{ij}|\ \|\vec{x}\|_\infty \\
&= \left(\max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |c_{ij}| \right) \|\vec{x}\|_\infty .
\end{aligned}$$

Il reste à montrer qu'on a l'égalité pour au moins un $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ avec $\vec{x} \neq \vec{0}$. Pour cela, on choisit un indice k tel que

$$\max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |c_{ij}| = \sum_{j=1}^n |c_{kj}|$$

puis pour $j = 1, \dots, n$, on choisit $x_j \in \{-1, 1\}$ tel que $|c_{kj}| = c_{kj}\, x_j$. Alors $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ satisfait $\|\vec{x}\|_\infty = 1$ et

$$\|\vec{L}(\vec{x})\|_\infty \geq |L_k(\vec{x})| = \left| \sum_{j=1}^n c_{kj} x_j \right| = \sum_{j=1}^n |c_{kj}|$$

donc

$$\|\vec{L}(\vec{x})\|_\infty \geqslant \left(\max_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|\right)\|\vec{x}\|_\infty$$

et par suite

$$\|\vec{L}(\vec{x})\|_\infty = \left(\max_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|\right)\|\vec{x}\|_\infty .$$

Exemple 4.3. Considérons l'application linéaire

$$\begin{aligned}\vec{L} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x-2y,\ x+y-3z)\end{aligned}$$

On a

$$\vec{L}(x,y,z)^t = \begin{pmatrix} x-2y \\ x+y-3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Donc la matrice de $\vec{L}$ est

$$[\vec{L}] = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

et on a

$$\|\vec{L}\|_\infty = \max\{1+2+0,\ 1+1+3\} = 5$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\vec{L}(x,y,z)\|_\infty \leqslant 5\,\|(x,y,z)\|_\infty \quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3}$$

(avec égalité pour $(x,y,z) = (1,1,-1)$).

Par extension, pour toute matrice $M=(c_{ij})\in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, on définit
$$\|M\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|.$$

<u>Exercice 4.1</u> Montrez que l'application
$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ M &\longmapsto \|M\|_\infty\end{aligned}$$
est bien une norme sur $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

<u>Exercice 4.2</u> Lorsqu'on munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ des normes $\|\ \|_1$, on obtient une norme correspondante sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ notée aussi $\|\ \|_1$. Montrez que si $\vec{L}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ est une application linéaire de matrice $[\vec{L}]=(c_{ij})\in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ alors
$$\|\vec{L}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{m} |c_{ij}|\right)$$