Cours 1 (MAT 2522)

Introduction

Le but du cours est de démontrer des théorèmes d'analyse généraux (Green, Divergence, Stokes) dont voici un analogue combinatoire.

Imaginons un nombre fini de charges ⊕ et ⊖ dans le plan, et un nombre fini de courbes orientées qu'on appellera lignes de champ. On suppose que

1) chaque ligne de champ naît à l'infini ou sur une charge ⊕ et meurt à l'infini ou sur une charge ⊖
2) il existe un entier $q \geq 1$ tel que q lignes de champ naissent sur chaque charge ⊕ et q lignes de champ meurent sur chaque charge ⊖.

Si D est un domaine du plan, on définit la charge de D par

$$\text{Charge}_D = (\text{nb. de charges} \oplus \text{ dans } D) - (\text{nb. de charges} \ominus \text{ dans } D)$$

Si C est une courbe fermée simple du plan, on définit le flux de champ à travers C par

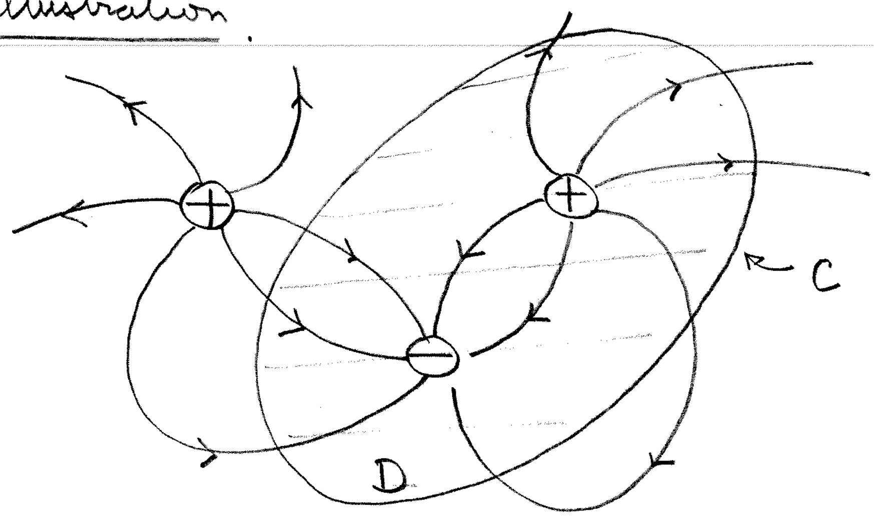
$$\text{Flux}_C = \frac{1}{q}(\text{nb. de fois où la courbe } C \text{ est traversée par une ligne de champ de l'intérieur vers l'extérieur}) - \frac{1}{q}(\text{nb. de fois où elle est traversée dans l'autre sens}).$$

Thm de Stokes combinatoire

Si D est la région du plan intérieure à C, on a

$$\text{Flux}_C = \text{Charge}_D.$$

Illustration.



Ici $\text{Charge}_D = 1-1 = 0$, $q = 6$ et $\text{Flux}_C = \frac{4}{6} - \frac{4}{6} = 0$.

Partie I : Fonctions de plusieurs variables.

1. Normes

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dim. finie.

Déf. Une norme sur V est une fonction $\begin{aligned} V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{v} &\longmapsto \|\vec{v}\| \end{aligned}$

telle que

1) $\|\vec{v}\| \geq 0 \quad \forall \vec{v} \in V$
2) $\|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$
3) $\|a\vec{v}\| = |a|\,\|\vec{v}\| \quad \forall a \in \mathbb{R}\ \forall \vec{v} \in V$
4) $\|\vec{v}_1 + \vec{v}_2\| \leq \|\vec{v}_1\| + \|\vec{v}_2\| \quad \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$

Thm. Si $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ sont deux normes sur V il existe $c_1, c_2 > 0$ t.q.

$$c_1 \|\vec{v}\|_1 \leq \|\vec{v}\|_2 \leq c_2 \|\vec{v}\|_1 \quad \forall \vec{v} \in V.$$

On exprime ceci en disant que les normes sur V sont équivalentes.

Exemple*. Pour $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit

$\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$ (norme L_1)

$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ (norme euclidienne)

$\|\vec{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ (norme du maximum)

Alors $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$ et

$$\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\, \|\vec{x}\|_\infty \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

(exercice).

2. Distance

Déf. Si $\| \ \|$ est une norme sur V, on définit la distance entre des points $\vec{v}, \vec{w}$ de V par

$$d(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\|.$$

On définit la boule de centre $\vec{v} \in V$ et de rayon $r \geq 0$ par

$$\boxed{B(\vec{v}, r) = \{\vec{w} \in V;\ \|\vec{v} - \vec{w}\| \leq r\}}$$

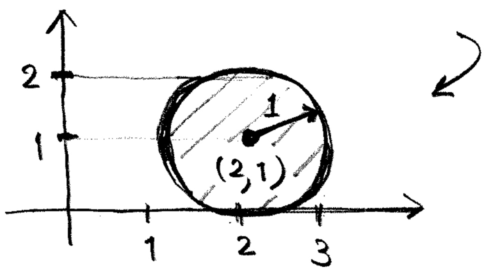
Ex. Si $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ et $\vec{y}=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, alors

$$d_\infty(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\|_\infty = \max\{|x_1-y_1|,\dots,|x_n-y_n|\}$$

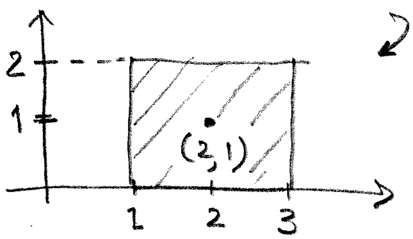
$$d_2(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\|_2 = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}$$

$d_2(\vec{x},\vec{y})$ est la distance euclidienne usuelle.

Ex. $B_2((2,1),1)$ = disque de rayon 1 centré en $(2,1)$:



$B_\infty((2,1),1)$ = carré de côté 2 centré en $(2,1)$



3. Topologie

Déf. Soit A un sous-ensemble de V, et soit $\vec{v}\in V$.

- On dit que A est un voisinage de $\vec{v}$ s'il existe $r>0$ tel que $\boxed{B(\vec{v},r)\subseteq A}$.
  (cette condition est indépendante du choix de la norme)
- On dit que A est un ouvert de V s'il est un voisinage de tous ses points.

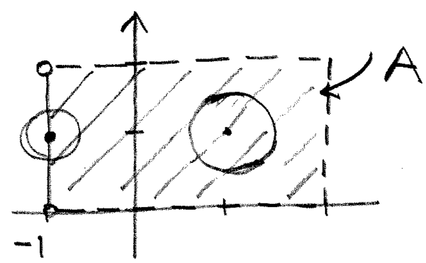
- On dit que A est un <u>fermé</u> de V si son complément $V \setminus A$ est ouvert.

- On dit que A est <u>borné</u> s'il existe $R > 0$ tel que $A \subseteq B(\vec{0}, R)$.

(cette condition est aussi indépendante du choix de la norme).

<u>Question</u>. Comment définir la frontière ∂A de A?

<u>Exemple</u>. $A = [-1, 2) \times (0, 2)$ est un voisinage de $(1,1)$ car $B_2((1,1), \frac{1}{2}) \subset A$.



Par contre ce n'est pas un voisinage de $(-1, 1)$ car $B_2((-1,1), r) \not\subset A$ pour tout $r > 0$.

Comme $(-1, 1) \in A$, cela signifie que A n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$.