Devoir 1 MAT1730 Question 1

on a $f(x) = \frac{x}{x+1}$ $g(x) = \cot(x)$

Trouvons les domaines de définition des fonctions f, g, $f\circ g$ et $g\circ f$.

Domaine de f

$x \in D_f$ si et seulement si $x+1 \neq 0$

Donc $x \neq -1$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Domaine de g

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \in D_g$ si et seulement si $\sin x \neq 0$

on a $\sin x = 0$ équivaut à $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

$$D_g = \{x : x \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} \setminus \{n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

Domaine de $f\circ g$

$x \in D_{f\circ g}$ si et seulement si $x \in D_g$ et $g(x) \in D_f$

Donc $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ et $\cotan(x) \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Donc $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ et $\cotan(x) \neq -1$

On resoud $\cotan x = -1$

Donc $\frac{\sin x}{\cos x} = -1$ i.e. $\sin x = -\cos x$

$\sin x = \cos(\pi - \cancel{x})$

On sait aussi que $\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos(\theta)$ ②

Posons $\theta = \pi - x$, alors

$\cos(\pi - x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$

ou encore plus simplement: $\sin x = -\cos x$

donc $\cos x = -\sin x = \cos(\frac{\pi}{2}+x)$

on a $\cos x = \cos(\frac{\pi}{2}+x)$

$\cos x = \cos(\frac{\pi}{2}+x) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+x+2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{2}-x+2k\pi$

Donc $2x = -\frac{\pi}{2}+2k\pi$

D'où $x = -\frac{\pi}{4}+k\pi$

Donc $\cotan(x) \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{4}+k\pi$

$D_{f\circ g} = \{x : x \neq n\pi \text{ et } x \neq -\frac{\pi}{4}+n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

$= \mathbb{R} \setminus \{n\pi, -\frac{\pi}{4}+n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$

<u>Déterminons $g\circ f$</u>

$x \in D_{g\circ f}$ si et seulement si $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$

Donc $x \neq -1$ et $f(x) \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

on a $f(x) = n\pi \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ donc $(1-n\pi)x = n\pi$

Donc $x = \frac{n\pi}{1-n\pi}, n \in \mathbb{Z}$ $D_{g\circ f} = \{x : x \neq -1 \text{ et } x \neq \frac{n\pi}{1-n\pi}, n \in \mathbb{Z}\}$

Question 2

(a) Résoudre l'inégalité suivante :

$$\left|\frac{2}{5x^2+6x+7}\right| < \frac{1}{3}$$

L'inéquation n'a de sens que si $5x^2+6x+7 \neq 0$

On resoud d'abord $5x^2+6x+7=0$

Calculer $\Delta = 6^2 - 4 \times 5 \times 7 = -104 < 0$

Le polynôme du second degré $5x^2+6x+7$ est du signe de 5, donc est strictement positif.

Alors $\left|\frac{2}{5x^2+6x+7}\right| < \frac{1}{3}$ équivaut à

$$\frac{2}{5x^2+6x+7} < \frac{1}{3} \; ; \; \frac{2}{5x^2+6x+7} - \frac{1}{3} < 0$$

On obtient alors $\frac{6-5x^2-6x-7}{3(5x^2+6x+7)} < 0$

Or on sait que $3(5x^2+6x+7) > 0$.

Il revient à résoudre $-5x^2-6x-1<0$

i.e. $5x^2+6x+1>0$

Le discriminant $\Delta = 6^2-4\times5\times1 = 16 > 0$

Deux racines distinctes

$x_1 = \frac{-6-\sqrt{16}}{2\times5} = \frac{-6-4}{10} = -1$ et $x_2 = \frac{-6+4}{10} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}$

Tableau de signes.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{5}$		$+\infty$
x^2+6x+1		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble solution est :

$$S = \{x : x < -1 \text{ ou } x > -\tfrac{1}{5}\} =]-\infty, -1[\cup]-\tfrac{1}{5}, +\infty[$$

(b) Résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{x^2+4x+3}$

L'inéquation ci-dessus est définie si et seulement si $x+1 \neq 0$ et $x^2+4x+3 \neq 0$.

On résoud $x+1=0$ et $x^2+4x+3=0$

i.e. $x=-1$ ~~et~~ $x^2+4x+3=0$

$$x^2+4x+3=0 \iff (x+2)^2-4+3=0$$
$$\iff (x+2)^2-1^2=0$$
$$\iff (x+2-1)(x+2+1)=0$$
$$\iff x+1=0 \text{ ou } x+3=0$$
$$\iff x=-1 \text{ ou } x=-3$$

L'inéquation est définie si et seulement si $x \neq -1$ et $x \neq -3$. [Aussi $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$]

Dans ce cas, nous avons :

$\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{x^2+4x+3}$ équivaut à $\dfrac{1}{x^2+4x+3} - \dfrac{1}{x+1} > 0$

Ainsi $\dfrac{x+1-x^2-4x-3}{(x+1)(x^2+4x+3)} > 0$; donc $\dfrac{-x^2-3x-2}{(x+1)(x+1)(x+3)} > 0$

$$\frac{-x^2-3x-2}{(x+1)^2(x+3)} > 0 .$$ On factorise le numérateur

$-x^2-3x-2=0$

$\Delta = (-3)^2 - 4(-2)(-1) = 1 \qquad x_1 = \frac{+3-1}{-2} = -1$

et $x_2 = \frac{3+1}{-2} = -2$

$-x^2-3x-2 = -(x+1)(x+2)$

Or $x \neq -1$, donc on simplifie par $x+1$.

Ainsi on obtient : $\frac{-(x+2)}{(x+1)(x+3)} > 0$

Il suffit d'étudier le signe de l'expression à gauche.

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$-(x+2)$		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
$(x+1)(x+3)$		$+$	0	$-$	|	$-$		$+$	
$\frac{-(x+2)}{(x+1)(x+3)}$		$+$	||	$-$	|	$+$	||	$-$	

L'ensemble solution est $S =]-\infty, 3[\cup]-2,-1[$

Question 3

$$V_{t+1} = r V_t$$

supposons que $V_0 = 8ml$ et le volume au jour 17 est $V_{17} = 16ml$.

(a) Trouvons r.

On a $V_1 = rV_0$; $V_2 = rV_1 = r^2 V_0$; $V_3 = rV_2 = r^3 V_0$.

$$V_{17} = rV_{16} = r^{17} V_0$$

on a alors $V_{17} = r^{17} V_0$ implique $16 = r^{17} \times 8$

Donc $r^{17} = 2$, d'où $r = 2^{\frac{1}{17}} = \sqrt[17]{2}$

(ou encore $\ln r^{17} = \ln 2$ donc $17 \ln r = \ln 2$, $r = 2^{1/17}$)

(b) Le jour où le volume sera égal à 64ml.

On a $V_n = rV_{n-1} = r^n V_0$

on a $V_n = 64$, donc $r^n V_0 = 64$; alors $r^n = 8$

$n \ln r = \ln 8$; donc $n = \dfrac{\ln 8}{\ln(2^{\frac{1}{17}})} = \dfrac{3 \ln 2}{\frac{\ln 2}{17}} = 51$

Le jour 51, le volume sera égal à 64ml, $V_{51} = 64ml$.

Question 4

(a) Écrire l'équation ~~du~~ système dynamique discret :

on sait que $L_1 = L_0 + 0,5\% L_0 - 1000$.

On a donc $L_1 = 1,005 L_0 - 1000$

$L_2 = 1,005 L_1 - 1000$

$L_3 = 1,005 L_2 - 1000$

Donc en général $L_{t+1} = 1,005 L_t - 1000$

La fonction d'itération est : $f(x) = 1,005x - 1000$

(b) Formule pour calculer le relevé L_{15} à partir de L_{16}.

On a $L_{16} = 1,005 L_{15} - 1000$, donc $L_{15} = \dfrac{L_{16} + 1000}{1,005}$

(C) Formule générale de la solution du SDD :

$L_{t+1} = f(L_t)$ et $f(x) = 1,005x - 1000$ est un système dynamique discret linéaire.

On cherche le point fixe.

On résoud $f(x) = x$; donc $1,005x - 1000 = x$

Donc $1,005x - x = 1000$

D'où $x = \dfrac{1000}{0,005} = 200\,000$ $\boxed{q = 200\,000}$

La solution est $L_t = (1,005)^t (L_0 - 9) + 9$

$$L_t = (1,005)^t (100\,000 - 200\,000) + 200\,000$$

$$= -100\,000 (1,005)^t + 200\,000$$

$$\boxed{L_t = 100\,000 \left(2 - (1,005)^t\right)}$$

$t = 0, 1, 2, 3, \ldots$

d) Nombre de mois pour rembourser la totalité du prêt.

Pour rembourser la totalité il faut que $L_t = 0$

Donc $(1,005)^t = 2$; ie $t = \dfrac{\ln 2}{\ln(1,005)} \simeq 138.975$

Le nombre de mois cherché est 139 mois.

~~Ca~~ Calculons le plus petit t tel que $L_t \leq 0$.

On a $L_t \leq 0 \iff 100\,000 \left(2 - (1,005)^t\right) \leq 0$

Donc $(1,005)^t \geq 2$

Donc $t \geq 138.975\ldots$

Le plus petit t est $\boxed{t = 139}$

(e) Fonction d'itération correspondante.

$$L_{t+2} = 1,005 \, L_{t+1} - 1000$$

$$= 1,005 (1,005 L_t - 1000) - 1000$$

$$= (1,005)^2 L_t - 2005 \, ; \quad f(x) = (1,005)^2 x - 2005$$