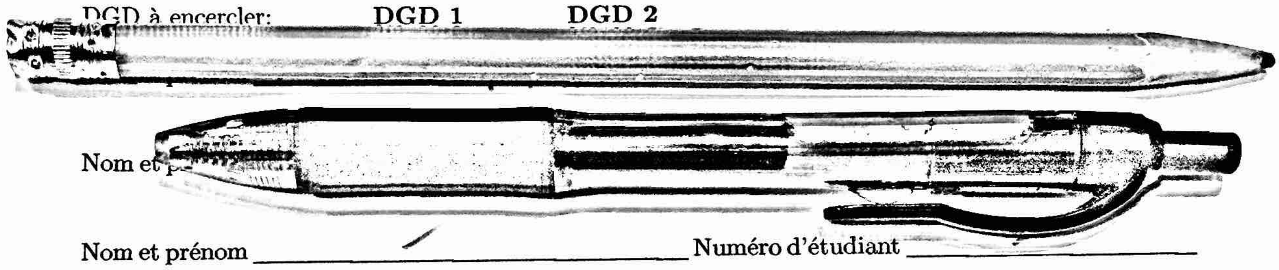
MAT 1730, Automne 2016 Devoir 1

Échéance Jeudi 22 Septembre 8:00pm.

Les devoirs en retard ne seront pas acceptés; ni les devoirs non agrafés. Les professeurs du département de mathématiques ne pouront pas vous prêter une agrafeuse; ne demandez pas une.

DGD à encercler: **DGD 1** **DGD 2**



Nom et p

Nom et prénom ______ Numéro d'étudiant ______

En signant ci-dessous, nous déclarons que ce travail est le nôtre et que nous n'avons pas copié à partir d'une autre source individuelle ou autre.

Signatures Ryan Cullen – [illegible]

Question 1. Pour toute fonction f, on note D_f son domaine de définition. Considérons les deux fonctions suivantes

$$f(x) = \frac{x}{x+1}, \qquad g(x) = \cot(x).$$

Trouver les domaines de définition des fonctions f, g, $f \circ g$, and $g \circ f$.

$$f\circ g = f(g(x)) = \frac{\operatorname{cotan}(x)}{\operatorname{cotan}(x)+1} = \frac{\cos(x)/\sin(x)}{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}+\cos^2(x)+\sin^2(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$$

$$g\circ f = g(f(x)) = \cot\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

Réponse:

$D_f = \boxed{\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}}$

$D_g = \boxed{\{x \in \mathbb{R}\}}$

$D_{f\circ g} = \boxed{\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2\pi n + \pi,\ n \in \mathbb{Z}\}}$

$D_{g\circ f} = \boxed{\{x \in \mathbb{R} \mid x > \pi x + \pi,\ n \in \mathbb{Z}\}}$

QUESTION 2. (a) Résoudre l'inégalité suivante:

$$\left|\frac{2}{5x^2+6x+7}\right| < \frac{1}{3}$$

Réponse: $\boxed{S = \{]-\infty, -1 [\cup]-1, -\frac{1}{5} [\cup]-\frac{1}{5}, \infty [\}}$

$$\frac{6}{5x^2+6x+7} > 1$$

$$6 < 5x^2+6x+7$$

$$0 < 5x^2+6x+1$$

$$< (5x+1)(x+1)$$

$$\boxed{x_2 < -1/5} \qquad \boxed{x_1 < -1}$$

(b) Résoudre l'inégalité suivante:

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x^2+4x+3}.$$

Réponse: $\boxed{S =]-\infty, -3 [\cup]-3, -2 [\cup]-2, -1 [\cup]-1, \infty [}$

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{(x+1)(x+3)}$$

$$\boxed{x_1 < -1 \,/\, x_2 < -3} \longleftarrow (x+1)(x+3) < (x+1)$$

$$x+3 > 1$$

$$x > -2$$

$$\boxed{x_3 > -2}$$

QUESTION 3. Supposons qu'une population de bactéries est surveillée quotidiennement. Son volume est multiplié par le même nombre chaque jour. Par conséquent, le volume V_t au jour t satisfait au système dynamique discret

$$V_{t+1} = rV_t.$$

Supposons que le volume initial est $V_0 = 8$ml et le volume au jour 17 est $V_{17} = 16$ml.

(a) Trouvez la valeur de r.

$V_T = r^t V_0$

$V_{17} = r^{17} 8$

$16 = r^{17} \cdot 8$

$2 = r^{17}$

$r = \sqrt[17]{2}$

$r = 1{,}0416$

Réponse: $\boxed{r = 1{,}0416}$

(b) À quel jour le volume sera égal à 64ml?

$V_T = r^t V_0$

$64 = 1{,}0416^T \cdot 8$

$8 = 1{,}0416^t$

$t = \dfrac{\log 8}{\log 1{,}0416}$

$t = 51$ jours

Réponse: $\boxed{t = 51 \text{ jours}}$

QUESTION 4. Supposons que lorsque vous avez terminé vos études et il est temps de rembourser vos prêts, vous avez une dette de \$ 100,000 \$. À partir de maintenant, chaque mois, la banque,ajoute 0,5 % de la valeur actuelle de l'intrêt. À la fin de chaque mois, vous payez 1000 \$. Vous recevez un relevé mensuel de la valeur restante de votre prêt, notée L_t, immédiatement après votre t -ième paiement. (En particulier, $L_0 = 100,000$.)

(a) Écrire l'équation du système dynamique discret (SDD) pour L_t et la fonction d'itération.

Le SDD est: $L_{t+1} =$ $\boxed{(1.005)L_t - 1000}$

La fonction d'itération est: $f(L) =$ $\boxed{1.005x - 1000}$

(b)Lorsque vous recevez le relevé pour L_{16}, vous réalisez que vous avez perdu le relevé pour L_{15}. Trouvez la formule qui calcule L_{15} à partir de L_{16}.

$L_{16} = (1.005)L_{15} - 1000$

$L_{16} + 1000 = (1.005)L_{15}$

$L_{15} = \dfrac{L_{16} + 1000}{1.005}$

$L_{15} =$ $\boxed{(L_{16} + 1000) / 1.005}$

(c) Écrire la formule genérale de la solution du SDD .

Réponse: $\boxed{f(L) = 1.005^n (1000)}$

(d) Combien de mois faut-il pour rembourser la totalité du prêt? Calculer le plus petit t pour lequel $L_t \leq 0$.

$0 = (1.005)L_t - 1000$

$L_t = \dfrac{1000}{1,005}$

$L_t \cong 995$

$L_t = 995$

$0 = L_{t+1} = 996$ mois

Réponse: $\boxed{996 \text{ mois}}$

(e) Votre banque modifie ses méthodes de diffusion: Pour économiser de l'argent, ils envoient seulement un relevé tous les deux mois. Votre calendrier de paiement ne change pas. Trouvez la fonction d'itération correspondante.

$L_{T+1} = 1.005 L_T - 1000$

$\times 2 = L_{T+2} = 2.01 L_{2T} - 2000$

Réponse: $L_{t+2} =$ $\boxed{2.01 L_T - 2000}$