



## Introduction

En géométrie, une droite représente une ligne rectiligne, infinie et sans épaisseur. Par contre, un plan peut être visualisé comme une feuille d'épaisseur nulle qui s'étend à l'infini.

Pour les anciens mathématiciens, les droites ainsi que les plans étaient un objet géométrique.

La première notion de la droite a été formalisée par Euclide dans son ouvrage «Les éléments». D'autres définitions viennent de s'ajouter avec le développement du calcul algébrique et vectoriel, notamment l'algèbre linéaire.

Des équations de droites et de plans sont leurs représentations algébriques. La clé pour lier les objets géométriques et leurs équations algébriques est que tout point sur les droites ou les plans satisfait les équations correspondantes.

Après l'étude de ce chapitre, tu pourras :

- ✓ Déterminer dans l'espace tridimensionnel, les différentes configurations possibles de deux droites (p. ex., parallèles, sécantes, gauches) et de deux et trois plans (p. ex., trois plans qui sont parallèles, intersection de deux plans, intersection possible d'une droite et d'un plan), et décrire les configurations des droites et des plans selon la nature des intersections (p. ex., l'intersection est une droite, un plan, un point ou est nulle).
- ✓ Reconnaître que l'équation d'une droite dans le plan représenté sous la forme  $Ax + By + C = 0$  est une équation cartésienne de la droite donnée, représenter une droite dans le plan au moyen d'équations vectorielles et paramétriques et faire le lien entre les équations de formes cartésienne et vectorielle.
- ✓ Dans l'espace tridimensionnel représenter une droite et un plan à l'aide d'équations vectorielles et paramétriques.
- ✓ Reconnaître algébriquement et géométriquement le vecteur normal au plan, c.-à-d. le vecteur perpendiculaire au plan.

## 1. Connaissances préalables

1. Détermine l'abscisse et l'ordonnée à l'origine des fonctions affines suivantes.

(a)  $2x - 9y = 18$

(b)  $4x + 8y = 9$

2. Résous chaque système d'équations.

(a) 
$$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = -x - 2 \end{cases}$$

(b) 
$$\begin{cases} 2x + 4y = 15 \\ 4x - 6y = -15 \end{cases}$$

3. Détermine l'équation de la droite perpendiculaire à  $y = -\frac{3}{2}x + 6$  et qui a la même ordonnée à l'origine que  $5x - 2y = 20$

4. Détermine un vecteur perpendiculaire au  $\vec{a} = [-3, 4]$

## 2. Équations d'une droite dans le plan et l'espace 3D

Dans le plan, on peut définir toute droite non verticale par sa pente et son ordonnée à l'origine. La pente indique l'orientation de la droite et l'ordonnée à l'origine indique sa position exacte. La droite se distingue ainsi d'autres droites de même pente. Dans l'espace tridimensionnel, la pente n'est pas définie. Il faut donc recourir à d'autres méthodes pour définir la droite.

### 2.1. Équation cartésienne d'une droite dans le plan

Dans l'espace à deux dimensions, une droite peut être définie par une équation de forme : **pente-ordonnée à l'origine** comme suit

$$y = mx + b$$

où  $m$  est la pente de la droite et  $b$  est l'ordonnée à l'origine ( $(0,b)$  est le point d'intersection de la droite avec l'axe des  $y$ ).

Aussi, l'équation d'une droite dans le plan ( $Oxy$ ) s'écrit

$$Ax + By + C = 0$$

où  $A, B$  et  $C$  sont des paramètres réels.

Cette équation s'appelle **équation cartésienne** ou canonique.

Par exemple,  $2x + 3y = 6$  est une équation cartésienne.

#### Exemple 1

- Déterminez l'équation pente-ordonnée de la droite passant par  $(1, -1)$  et  $(2, 6)$ .

On calcule la pente  $m$  par 
$$m = \frac{6 - (-1)}{2 - 1} = 7$$

L'ordonnée à l'origine est alors, 
$$b = y - mx = 6 - 7(2) = -8$$

d'où, l'équation de la droite passant par  $(1, -1)$  et  $(2, 6)$  est

$$y = 7x - 8$$

- Soit la droite définie par l'équation  $y = -\frac{4}{5}x - 4$ .

- Écris une équation cartésienne de la droite.

$$y = -\frac{4}{5}x - 4 \implies 5y = -4x - 20 \implies 4x + 5y + 20 = 0$$

- Comment la pente de la droite se compare-t-il avec l'équation cartésienne ?

Le numérateur et le dénominateur de la pente correspondent aux coefficients de  $x$  et de  $y$  respectivement dans l'équation cartésienne avec le signe «-» (négatif).

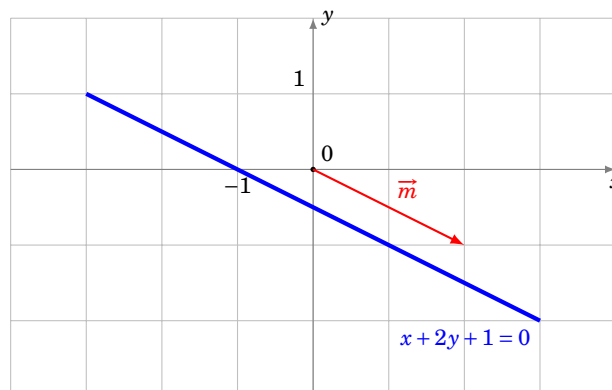
## 2.2. Équation vectorielle d'une droite

### Définition 1

Un **vecteur directeur**, noté  $\vec{m}$ , d'une droite  $\mathcal{D}$  du plan est un vecteur non nul de direction  $\mathcal{D}$ .

### Exemple

Soit la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $x + 2y + 1 = 0$



Un vecteur directeur parallèle à la droite  $\mathcal{D}$  est  $\vec{m} = [2, -1]$ .

### Remarque 1

- Il existe donc une infinité de vecteurs directeurs qui peuvent être associés à une droite donnée  $\mathcal{D}$ .
- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont des vecteurs directeurs d'une même droite, alors  $\vec{u} = k\vec{v}$ , pour  $k \in \mathbb{R}$  différent de zéro.
- Pour un vecteur  $\vec{v} \neq \vec{0}$  donné, il existe une infinité de droites dont il est directeurs. Ces droites sont toutes parallèles : ont même pente, mais différente ordonnée à l'origine.

### Remarque 2

Si la droite n'est pas verticale, alors il existe un lien entre les caractéristiques de l'équation cartésienne d'une droite  $\mathcal{D}$  et les coordonnées d'un vecteur directeur  $\vec{m}$ .

En effet, soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  des nombres réels non nuls. La droite d'équation

$$ax + by = c$$

admet un vecteur directeur

$$\vec{m} = [-b, a]$$

C'est-à-dire,

$$\vec{m} = [-b, a] \quad \Longleftrightarrow \quad m = \frac{-b}{a}.$$

où  $m$  est la pente de la droite  $\mathcal{D}$ .

**Exemple 2**

Soit l'équation de la droite  $\mathcal{D}$  suivante  $3x - 2y = 5$ . Déterminer la pente  $m$ , ainsi qu'un vecteur directeur de la droite  $\mathcal{D}$ .

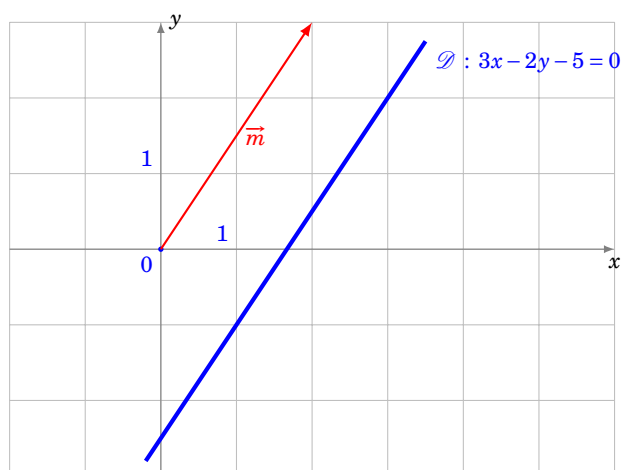
On transforme l'équation cartésienne de la droite  $\mathcal{D}$  sous forme pente-ordonnée à l'origine :

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$$

Ainsi, la pente de la droite  $\mathcal{D}$  est  $m = \frac{3}{2}$ .

Un vecteur directeur associé à  $\mathcal{D}$  est

$$\vec{m} = [2, 3]$$

**Rappel 1**

Un **vecteur position** sert à indiquer la position d'un point  $P$  par rapport à un repère dont le point initial occupe l'origine  $O$  du repère et l'autre extrémité du vecteur se trouve à l'endroit du point  $P$ . c'est le segment orienté  $\overrightarrow{OP}$ .

**Proposition 1**

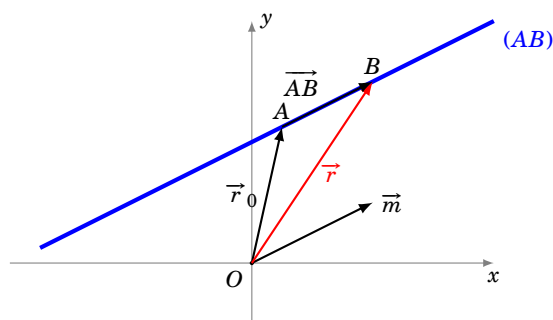
L'équation vectorielle d'une droite dans l'espace à deux dimensions est

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{m} \quad \text{ou} \quad [x, y] = [x_0, y_0] + t \cdot [m_1, m_2]$$

où

- $t \in \mathbb{R}$
- $\vec{r} = [x, y]$  est un vecteur position d'un point **inconnu** sur la droite.
- $\vec{r}_0 = [x_0, y_0]$  est un vecteur position d'un point **connu** sur la droite.
- $\vec{m} = [m_1, m_2]$  est un vecteur directeur parallèle à la droite.

En effet, soit  $A$  et  $B$  deux points formant la droite  $(AB)$ . On désigne par  $\vec{r}_0$  le vecteur position de  $A$  et  $\vec{r}$  le vecteur position de  $B$ . Soit  $\vec{m}$  un vecteur directeur de la droite  $(AB)$ . Alors, Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\vec{m}$  sont colinéaires. Donc, il existe un réel  $t$  tel que  $\overrightarrow{AB} = t\vec{m}$ .



Mais, nous avons que  $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$  ce qui est équivalent à  $\vec{r}_0 + t\vec{m} = \vec{r}$ .  
L'équation vectorielle de la droite (AB) s'écrit alors

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{m}$$

### Exemple

Écrire l'équation vectorielle de la droite  $x + 2y - 1 = 0$ .

Un vecteur directeur de cette droite est  $\vec{m} = [2, -1]$ . On trouve un point quelconque sur la droite, par exemple le point  $(1, 0)$ . Donc, l'équation vectorielle de la droite est

$$[x, y] = [1, 0] + t \cdot [2, -1]$$

### Exercice 1

1. Écris une équation vectorielle de la droite selon le vecteur directeur  $\vec{m} = [-2, 5]$  et le point  $P_0(10, -4)$

$$[x, y] = [10, -4] + t \cdot [-2, 5]$$

2. Écris une équation vectorielle de la droite qui passe par  $A(1, 4)$  et  $B(3, 1)$ .

On détermine le vecteur qui va du point A au point B pour obtenir le vecteur directeur.

$$\vec{m} = \vec{AB} = (3, 1) - (1, 4) = [2, -3]$$

On choisit le point A ou le point B comme vecteur position :  $\vec{r}_0 = [1, 4]$ .

Une équation vectorielle est

$$[x, y] = [1, 4] + t[2, -3], \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

3. Détermine si le point  $P(2, 3)$  est sur la droite de la question 2.

Si le point  $(2, 3)$  est sur la droite, alors il y a une seule valeur de  $t$  qui vérifie l'équation.

$$[x, y] = [1, 4] + t[2, -3] \text{ devient}$$

$$[2, 3] = [1, 4] + t[2, -3]$$

On pose une égalité entre les abscisses d'une part et entre les ordonnées d'autre part.

$$\begin{cases} 2 = 1 + 2t & \Rightarrow & t = 1/2 \\ 3 = 4 - 3t & \Rightarrow & t = -2/3 \end{cases}$$

Puisque les valeurs de  $t$  ne sont pas égales, le point  $(2, 3)$  n'est pas sur la droite.

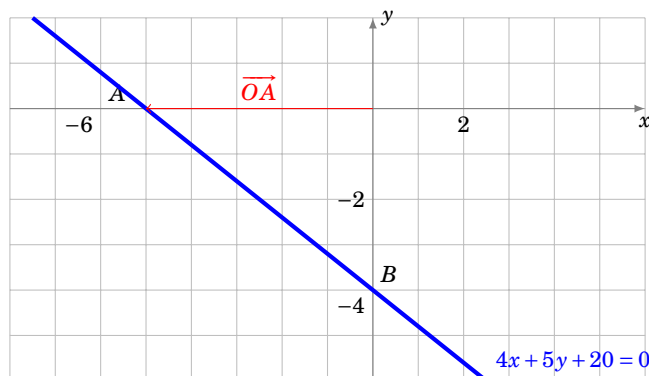
## Exercice 2

Soit la droite définie par l'équation  $y = -\frac{4}{5}x - 4$ .

- a) Écris une équation cartésienne de cette droite.

$$4x + 5y + 20 = 0$$

- b) Trace cette droite



- c) Détermine un vecteur position perpendiculaire à la droite.

Le vecteur directeur de la droite est  $\vec{m} = [5, -4]$ .

Pour déterminer un vecteur disons  $\vec{d} = [x, y]$  perpendiculaire à  $\vec{m}$ , il faut se rappeler que  $\vec{d} \cdot \vec{m} = 0$  si  $\vec{d}$  et  $\vec{m}$  sont perpendiculaires.

$$[5, -4] \cdot [x, y] = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x - 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5}{4}x$$

On attribue n'importe quelle valeur à  $x$ , disons  $x = 4$  qui convient bien ici, et on trouve  $y = \frac{5}{4}(4) = 5$

Donc,  $\vec{d} = [4, 5]$  est perpendiculaire à la droite.

- d) Comment le vecteur position en c) se compare-t-il avec l'équation cartésienne ?

Les composantes du vecteur  $\vec{d}$  correspondent aux coefficients de  $x$  et de  $y$  dans l'équation cartésienne.

- e) Écris une équation vectorielle de la droite

Pour écrire une équation vectorielle, il faut un vecteur position, par exemple  $\vec{OA}$ , et un vecteur directeur. Une équation vectorielle de la droite est

$$[x, y] = [-5, 0] + t[5, -4] \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

## 2.3. Équation paramétrique d'une droite

En divisant l'équation vectorielle d'une droite en deux parties pour chaque variable, nous obtenons une **équation paramétrique** de la droite. Ce nom est dû au paramètre  $t \in \mathbb{R}$ .

### Proposition 2

L'équation paramétrique d'une droite dans l'espace à deux dimensions est

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot m_1 \\ y = y_0 + t \cdot m_2 \end{cases}$$

où

- $t \in \mathbb{R}$  est le paramètre.
- $(x_0, y_0)$  est un point qui appartient à la droite.
- $\vec{m} = [m_1, m_2]$  est un vecteur directeur parallèle à la droite.

### Exercice 3

Soit la droite  $\mathcal{D}_1$  d'équation paramétrique  $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -5 + 4t \end{cases}$ ,

1. Trouver deux points sur la droite.

N'importe quelle valeur de  $t$  produira un point situé sur la droite.

Posons  $t = 0$ , nous obtenons un point  $(3, -5)$ .

Posons  $t = 1$ , nous obtenons un autre point  $(5, -1)$ .

2. Écrire l'équation vectorielle de la droite.

L'équation vectorielle de la droite est donnée par  $[x, y] = [3, -5] + t \cdot [2, 4]$

3. Écrire l'équation cartésienne de la droite.

Pour trouver une équation cartésienne à partir d'une représentation paramétrique, il faut isoler  $t$  dans les deux équations paramétriques.

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -5 + 4t \end{cases} \implies \begin{cases} t = \frac{x-3}{2} \\ t = \frac{y+5}{4} \end{cases} \implies \frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{4} \implies 4x - 12 = 2y + 10$$

Donc l'équation cartésienne de la droite est

$$2x - y - 11 = 0$$

4. Détermine si la droite  $\mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 8 + 12t \end{cases}$ , est parallèle à  $\mathcal{D}_1$

Les vecteurs directeurs des deux droites sont, respectivement,  $\vec{m}_1 = [2, 4]$  et  $\vec{m}_2 = [3, 12]$ .

Il est clair que l'un n'est pas multiple de l'autre, car il n'existe pas un  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $[2, 4] = k[3, 12]$ .

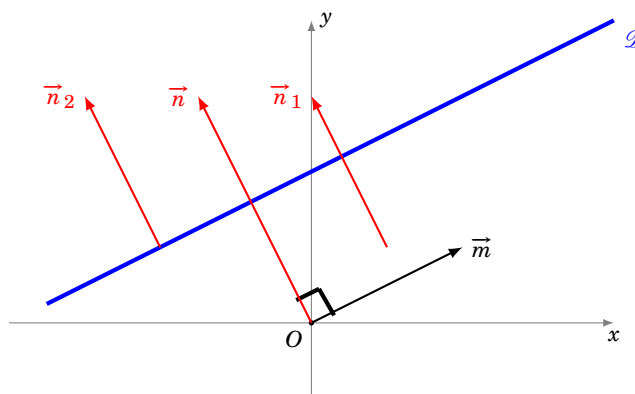
Donc les droites ne sont pas parallèles.

**Définition 2**

Un vecteur **normal**, noté  $\vec{n}$ , à une droite  $\mathcal{D}$  est un vecteur non nul et orthogonal à un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ .

**Proposition 3**

Étant donné une droite  $\mathcal{D}$  d'équation cartésienne  $ax + by + c = 0$ , avec  $(a, b) \neq (0, 0)$ , un vecteur normal à  $\mathcal{D}$  est  $\vec{n} = [a, b]$ .



Les vecteurs  $\vec{n}$ ,  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  sont orthogonaux à  $\vec{m}$ ; chacun est un vecteur normal à la droite  $\mathcal{D}$ .

**Exercice 4**

Soit une droite  $\mathcal{D}$  dans le plan. Déterminer une équation cartésienne de  $\mathcal{D}$  de vecteur normal  $\vec{n} = [2, 1]$  et passant par le point  $P(3, 4)$ .

Le vecteur normal est  $\vec{n} = [2, 1]$ , donc une équation cartésienne de  $\mathcal{D}$  est  $2x + y + c = 0$ .

Le point  $P(3, 4)$  appartient à  $\mathcal{D}$ , donc il vérifie l'équation cartésienne  $2x + y + c = 0$ . Ainsi,

$$2(3) + 4 + c = 0 \implies c = -10.$$

Une équation cartésienne de  $\mathcal{D}$  est donc

$$2x + y - 10 = 0$$

Ainsi, il y a plusieurs façons de représenter une droite dans un plan, notamment, une cartésienne, paramétrique, vectorielle et pente-ordonnée à l'origine. Toutefois, dans l'espace tridimensionnel, on ne peut pas définir une telle droite par une équation cartésienne ou encore par la forme pente-ordonnée à l'origine. Mais on peut la définir par une équation vectorielle ou par des équations paramétriques.

Tout comme dans le plan cartésien, il faut un vecteur directeur et un vecteur position d'un point connu pour représenter une droite dans l'espace à trois dimension.

## 2.4. Équation d'une droite dans l'espace à trois dimensions

### Proposition 4

L'équation vectorielle d'une droite dans l'espace à trois dimensions est

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{m} \quad \text{ou} \quad [x, y, z] = [x_0, y_0, z_0] + t \cdot [m_1, m_2, m_3]$$

- $t \in \mathbb{R}$
- $\vec{r}_0 = [x_0, y_0, z_0]$  est un vecteur position d'un point connu sur la droite.
- $\vec{m} = [m_1, m_2, m_3]$  est un vecteur directeur à la droite.

### Proposition 5

L'équation paramétrique d'une droite dans l'espace à trois dimensions est

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot m_1 \\ y = y_0 + t \cdot m_2 \\ z = z_0 + t \cdot m_3 \end{cases}$$

Pour trouver une équation vectorielle d'une droite qui passe par deux points  $P(x_1, y_1, z_1)$  et  $Q(x_2, y_2, z_2)$ , il suffit de se servir du vecteur directeur  $\vec{m} = \vec{PQ}$ , à savoir

$$\vec{m} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1].$$

L'équation vectorielle est alors

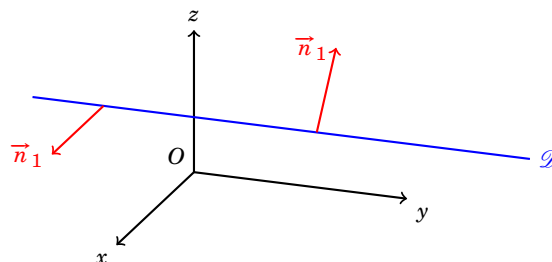
$$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + t \cdot [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1], \quad t \in \mathbb{R}$$

et par conséquent, l'équation paramétrique de la droite est

$$\begin{cases} x = x_1 + t \cdot (x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t \cdot (y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t \cdot (z_2 - z_1) \end{cases}$$

### Remarque 3

Une droite dans l'espace 3D a un nombre infini de vecteurs normaux, mais ils ne sont pas nécessairement parallèles les uns aux autres.



**Exemple**

Une droite passe par les points  $(2,1,0)$  et  $(1,0,3)$ . Écrire deux équations vectorielle et paramétriques de la droite.

Le vecteur directeur est

$$\vec{m} = [1,0,3] - [2,1,0] = [-1, -1, 3]$$

Donc, l'équation vectorielle est

$$[x, y, z] = [2, 1, 0] + t \cdot [-1, -1, 3]$$

L'équation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = 3t \end{cases}$$

**Exemple**


Une droite est définie par  $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 7t \\ z = 5 - 9t \end{cases}$ .

Détermine si le point  $(3, 1, 2)$  se situe sur la droite  $\mathcal{D}$ .

Si  $(3, 1, 2)$  se trouve sur la droite, alors il existe un certain  $t \in \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{cases} 3 = 2 + t \\ 1 = -1 + 7t \\ 2 = 5 - 9t \end{cases} \implies \begin{cases} t = -1 \\ t = 2/7 \\ t = 1/3 \end{cases}$$

Les valeurs de  $t$  ne sont pas égales. Ainsi, le point  $(3, 1, 2)$  ne se situe pas sur la droite.

 Faire les exercices du manuel suivants :

Pages : 437. No : 1, 2, 5, 6, 7, 8, 11, 14, 16, 20, 21 et 23

### 3. Équations d'un plan dans l'espace tridimensionnel

On a vu qu'une droite est entièrement déterminée par un point et un vecteur directeur. Cela n'est pas le cas pour un plan, un seul vecteur directeur et un point ne suffit pas à déterminer la direction du plan. Par contre, un vecteur normal (perpendiculaire au plan) suffit à spécifier entièrement cette direction. Un plan de l'espace est donc déterminé entièrement par un point qui lui appartient et un vecteur normal qui lui est orthogonal.

Aussi, on verra que pour définir un plan dans l'espace à trois dimensions, il faut trois points non colinéaires appartenant au plan ou deux vecteurs directeurs non colinéaires, parallèles au plan et un point dans le plan.

#### 3.1. Équation cartésienne d'un plan dans l'espace 3D

Soit un plan  $\mathcal{P}$  et soit  $\vec{n} = [A, B, C]$  un vecteur normal à  $\mathcal{P}$  et  $P(x_0, y_0, z_0)$  un point fixé de  $\mathcal{P}$  et prenons  $Q(x, y, z)$  un point inconnu de  $\mathcal{P}$ .

Puisque  $\vec{n}$  est orthogonal au plan  $\mathcal{P}$ , il est orthogonal à tout vecteur appartenant au plan  $\mathcal{P}$ , en particulier  $\vec{n}$  est orthogonal à  $\overrightarrow{PQ}$ . Donc,

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} \cdot [A, B, C] = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$$

Posons  $D = (-Ax_0 - By_0 - Cz_0)$ , nous obtenons l'équation cartésienne d'un plan  $\mathcal{P}$  :

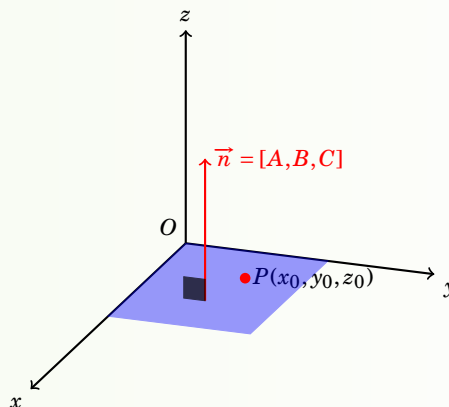
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

#### Proposition 6

L'équation cartésienne d'un plan  $\mathcal{P}$  dans l'espace à trois dimensions passant par le point  $P(x_0, y_0, z_0)$  est

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

où,  $\vec{n} = [A, B, C]$  est un vecteur normal au plan et  $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ .



**Remarque**

- Dire qu'un vecteur est orthogonal (perpendiculaire) à un plan c'est dire qu'il est normal au plan et vice-versa, un plan est orthogonal (perpendiculaire) à un vecteur c'est dire qu'il est normal au plan.
- Si le produit vectoriel  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{n}$ , alors  $\vec{n}$  est orthogonal au plan  $\mathcal{P}$  qui contient les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ . Le vecteur  $\vec{n}$  est donc normal au plan  $\mathcal{P}$ .

**Exemple**

- Trouver une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}$  passant par le point  $(3, -2, 5)$  et orthogonal au vecteur  $\vec{n} = [2, 3, 1]$ .

Par application immédiate de la proposition,

$$\begin{aligned} 2(x-3) + 3(y-(-2)) + 1(z-5) &= 0 \\ 2x + 3y + z - 5 &= 0 \end{aligned}$$

- Le vecteur  $\vec{a} = [4, 1, -2]$  est-il parallèle au plan  $\mathcal{P}$  ?

$\vec{a}$  est parallèle au plan seulement si  $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ .

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = [4, 1, -2] \cdot [2, 3, 1] = 8 + 3 - 2 = 9$$

Le vecteur  $\vec{a}$  n'est pas parallèle au plan.

- Le vecteur  $\vec{b} = [15, -10, 25]$  est-il normal au plan  $\mathcal{P}$  ?

$\vec{b}$  est normal au plan seulement s'il est parallèle au vecteur normal  $\vec{n}$ , c.-à-d. seulement s'il existe un nombre non nul  $k$  tel que  $\vec{b} = k\vec{n}$ .

$$[15, -10, 25] = k[2, 3, 1]$$

$$15 = 2k \quad -10 = 3k \quad 25 = k$$

impossible de trouver un tel  $k$ . Le vecteur  $\vec{b}$  n'est pas normal au plan.

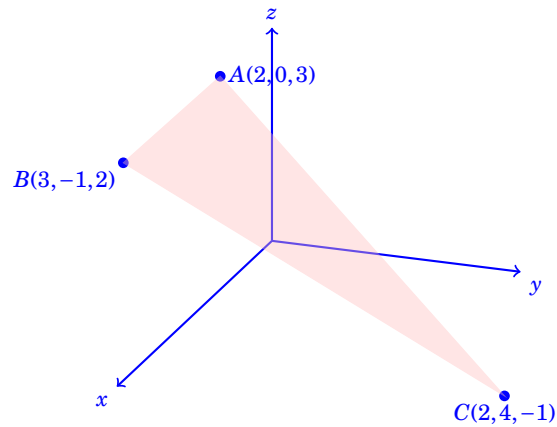
- Détermine un vecteur qui est normal au plan  $\mathcal{P}$  ?

Tout multiple scalaire de  $\vec{n} = [2, 3, 1]$  est normal au plan. C'est le cas de  $[4, 6, 2]$ .

**Exemple**

Trouver une équation cartésienne du plan passant par les points  $A(2,0,3)$ ,  $B(3,-1,2)$  et  $C(2,4,-1)$ .

Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  déterminent un plan qui contient le triangle dans la figure suivante.



Le vecteur  $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$  est normal au plan de la figure.

$$\vec{n} = [3-2, -1-0, 2-3] \times [2-2, 4-0, -1-3] = [8, 4, 4]$$

Donc,

$$8(x-2) + 4(y-0) + 4(z-3) = 0$$

$$8x + 4y + 4z - 28 = 0$$

Alors, l'équation vectorielle du plan est

$$2x + y + z - 7 = 0$$

### 3.2. Équation vectorielle d'un plan dans l'espace 3D

Pour définir un plan de façon unique dans l'espace 3D, il faut trois points non colinéaires ou deux vecteurs directeurs non parallèles et un point.

#### Proposition 7

L'équation vectorielle d'un plan  $\mathcal{P}$  dans l'espace à trois dimensions est

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a} + s\vec{b} \quad \text{ou} \quad [x, y, z] = [x_0, y_0, z_0] + t \cdot [a_1, a_2, a_3] + s \cdot [b_1, b_2, b_3]$$

- $\vec{r} = [x, y, z]$  est un vecteur position d'un point quelconque dans le plan.
- $\vec{r}_0 = [x_0, y_0, z_0]$  est un vecteur position d'un point connu dans le plan.
- $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$  et  $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$  sont deux vecteurs directeurs non colinéaires, parallèles au plan.

### 3.3. Équations paramétriques d'un plan dans l'espace 3D

#### Proposition 8

L'équation paramétrique d'un plan  $\mathcal{P}$  dans l'espace à trois dimensions est

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ta_1 + sb_1 \\ y &= y_0 + ta_2 + sb_2 \\ z &= z_0 + ta_3 + sb_3 \end{aligned}$$

où  $t, s \in \mathbb{R}$ .

#### Exemple

Détermine les équations vectorielles et paramétriques du plan qui contient les points  $A(2, 0, 3)$ ,  $B(3, -1, 2)$  et  $C(2, 4, -1)$ .

Soit

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = [1, -1, -1] \quad \text{et} \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC} = [0, 4, -4]$$

Une équation vectorielle du plan possible est

$$[x, y, z] = [2, 4, -1] + t \cdot [1, -1, -1] + s \cdot [0, 4, -4]$$

Les équations paramétriques du plan qui correspondent à l'équation vectorielle sont

$$\begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 4 - t + 4s, \\ z &= -1 - t - 4s \end{aligned}$$

**Exercice 5**

Considérons le plan avec des vecteurs directeurs  $\vec{a} = [1, 2, -3]$  et  $\vec{b} = [2, -1, 4]$  qui passe par le point  $(2, 0, 1)$ .

a) Écrire les équations vectorielle et paramétriques du plan

L'équation vectorielle du plan est

$$[x, y, z] = [2, 0, 1] + t \cdot [1, 2, -3] + s \cdot [2, -1, 4]$$

Les équations paramétriques du plan

$$\begin{cases} x = 2 + t + 2s \\ y = 2t - s \\ z = 1 - 3t + 4s \end{cases}$$

b) Donner deux autres points du plan

Toute combinaison de valeurs des paramètres  $t$  et  $s$  produira un point sur le plan.

Posons  $t = 0$  et  $s = 1$ , on obtient un point  $(4, -1, 5)$ .

Posons  $t = 1$  et  $s = 0$ , nous obtenons un autre point  $(3, 2, -2)$

c) Déterminer l'abscisse à l'origine du plan

Afin de trouver l'abscisse à l'origine, on pose  $y = 0$  et  $z = 0$  dans les équations paramétriques et on résout le système pour  $t$  and  $s$ ,

$$\begin{cases} x = 2 + t + 2s \\ 0 = 2t - s \\ 0 = 1 - 3t + 4s \end{cases}$$

On résout la deuxième et la troisième équations pour  $t$  et  $s$  par élimination.

Par la deuxième,  $s = 2t$ . On remplace dans la troisième,  $1 - 3t + 4(2t) = 0$  et cela donne

$$\begin{cases} t = -\frac{1}{5} \\ s = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Alors, l'abscisse à l'origine est  $x = 2 - \frac{1}{5} + 2\left(-\frac{2}{5}\right) = 1$

**Exercice 6**

Soit le plan  $\mathcal{P}$  d'équation paramétrique 
$$\begin{cases} x = 3 - 2s + 2t \\ y = 1 + 3s + t \\ z = 5 - s - 2t \end{cases}$$

Écrire une équation cartésienne pour  $\mathcal{P}$ .

Le point  $(3, 1, 5)$  appartient au plan  $\mathcal{P}$ . Soit les vecteurs directeurs du plan  $\mathcal{P}$

$$\vec{a} = [-2, 3, -1] \quad \text{et} \quad \vec{b} = [2, 1, -2]$$

Le vecteur  $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$  est normal au plan  $\mathcal{P}$ .


$$\begin{aligned} \vec{n} &= \vec{a} \times \vec{b} \\ \vec{n} &= [-2, 3, -1] \times [2, 1, -2] \\ \vec{n} &= [-5, -6, -8] \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} -5(x-3) - 6(y-1) - 8(z-5) &= 0 \\ 5(x-3) + 6(y-1) + 8(z-5) &= 0 \\ 5x + 6y + 8z - 61 &= 0 \end{aligned}$$

Alors, l'équation vectorielle du plan est

$$5x + 6y + 8z - 61 = 0$$

 Faire les exercices du manuel suivants :  
Pages : 451. No : 1, 3, 5, 6 et 10

**Auteurs**

Hicham Loukrati