Université d'Ottawa
Département de Mathématiques et de Statistiques
MAT 1700 C- Méthodes Mathématiques I
Professeur : Abdelkrim El basraoui

Examen partiel I – V-1

14/10/2015

Nom :................Solution....................

Numéro d'étudiant :...........

Instructions: (Lisez-les attentivement S.V.P.)

- Écrivez votre nom et numéro d'étudiant dans la première page dans l'espace précisé.
- La durée de cet examen est de **80 minutes**.
- Cet examen est un examen à livre fermé qui comporte **8 questions**.
- Vous devez justifier vos réponses.
- Vous avez une page supplémentaire à la fin que vous pouvez utiliser comme feuilles de brouillon.
- Les calculatrices ne sont pas permises.
- **Ne pas détacher ce livret**.

BONNE CHANCE!!!

Note Totale **sur 45**	

Question 1: [5pts]
Trouvez les asymptotes horizontales et verticales de la fonction suivante, si elles existent (inscrivez vos réponses en bas):

$$f(x) = \frac{5x-20}{x^2-16}$$

- Notez que $D_f = \{x \mid x \neq \pm 4\}$.
- Forme simplifiée: $f(x) = \frac{5(x-4)}{x^2-16} = \frac{5}{x+4}$.
- A.V.: On a: $\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} \frac{5}{x+4} = \boxed{\frac{5}{8}}$

et donc il n'y a pas d'A.V. en $x = 4$.

En $x=-4$ on a: $\lim_{x \to -4^-} f(x) = \lim_{x \to -4^-} \frac{5}{x+4} = \frac{5}{0^-} = -\infty$

Aussi $\lim_{x \to -4^+} f(x) = \infty$.

Donc $x = -4$ est une A.V. de $f(x)$.

- A.H.: On a: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{5}{x+4} = \frac{5}{\infty} = 0$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{5}{x+4} = \frac{5}{-\infty} = 0$

D'où $y = 0$ est une A.H. de $f(x)$.

Asymptote horizontale: $y = 0$.
Asymptote verticale: $x = -4$.

Question 2: [5pts]

Une petite entreprise achète une pièce d'équipment pour 65 000 \$ et estime que sa durée de vie sera de 20 ans, après lesquels elle aura une valeur de 5 000 \$.

(a) Donnez la formule pour la valeur de la pièce après t années, $V(t)$.

$$V(t) = 65000 - \left(\frac{65\,000 - 5000}{20}\right) \cdot t$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{V(t) = 65000 - 3000\,t}$$

(b) Quelle est la valeur de la pièce après 5 ans ?

$$V(5) = 65\,000 - 3000 \cdot (5)$$

$$\boxed{V(5) = 50000\ \$}$$

(c) Quand est-ce que cette pièce aura une valeur de 35 000 \$?

$$V(t) = 35\,000 = 65000 - 3000t$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{65\,000 - 35\,000}{3000} = 10$$

$$\boxed{t = 10 \text{ ans}}$$

(d) Quel est le taux de dépréciation ?

Le taux de dépréciation est 3000 \$/année.

Question 3: [9pts]

Évaluez les limites suivantes:

a) $\lim_{x\to 2} \frac{2x-4}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{2\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{x+2} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{6x^2+6x+7}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(6+\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(3+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{6}{3} = \boxed{2}$.

c) $\lim_{x\to 0} \frac{-4x^4}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{-4}{x} = \frac{-4}{0}$ qui est une forme indéterminée.

On calcule donc: $\lim_{x\to 0^-} \frac{-4x^4}{x^5} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-4}{x} = \infty$

et $\lim_{x\to 0^+} \frac{-4x^4}{x^5} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-4}{x} = -\infty$

D'où $\lim_{x\to 0} \frac{-4x^4}{x^5}$ n'existe pas.

Question 4: [6pts]
Soit

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si } x < -2 \\ -4 & \text{si } x = -2 \\ 2x & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

(a) Donnez $f(-2)$.

$f(-2) = -4$

(b) Calculez $\lim_{x \to -2} f(x)$, si elle existe.

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (3x+2) = -4$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (2x) = -4.$$

Donc $\boxed{\lim_{x \to -2} f(x) = -4}$

(c) Est-ce que $f(x)$ est continue? Justifiez votre réponse.

f est continue sur les intervalles $]-\infty, -2[$, $]-2, \infty[$.
En $x=-2$ on a: $\lim_{x \to -2} f(x) = -4 = f(-2)$ et donc
f est continue en $x=-2$.
D'où f est continue sur $\mathbb{R}$.

Question 5: [4pts]

Trouvez l'inverse de la fonction suivante:

$$f(x) = \frac{x-1}{3x-2}.$$

On résoud $y = \dfrac{x-1}{3x-2}$ par rapport à x.

$\iff (3x-2)y = x-1 \iff 3xy - x = 2y-1$

$\iff x = \dfrac{2y-1}{3y-1}$.

D'où $\boxed{f^{-1}(x) = \dfrac{2x-1}{3x-1}}$

Question 6: [5pts]

Résolvez l'équation suivante:

$$\ln(x-1) + \ln(x-2) = \ln(12).$$

$\iff \ln((x-1)(x-2)) = \ln(12)$

Composez par e^x pour obtenir

$(x-1)(x-2) = 12$

$\iff x^2 - 3x - 10 = 0$

$\iff (x-5)(x+2) = 0 \iff \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases}$

On rejete $x=-2$ car ni $\ln(x-1)$ ni $\ln(x-2)$ ne sont définies en $x=-2$.

D'où la solution est $\boxed{x=5}$.

Question 7: [6pts]

a) La fabrication d'un verre en cristal nécessite un investissement initial de 1 980 \$ pour le temps au four et ensuite 1.80 \$ pour chaque vert fabriqué. Nous vendons les verres pour 9 \$ chacun. Quel est le seuil de rentabilité?

On a la fonction coût est : $C(x) = 1980 + 1.8x$, où x est le nombre de verres, et la fonction revenu est $R(x) = 9x$.

Donc le seuil de rentabilité est le point d'intersection entre $C(x)$ et $R(x)$. On a alors :

$C(x) = R(x) \iff 1980 + 1.8x = 9x \iff 7.2x = 1980$

$\iff x = \frac{1980}{7.2} = 275$ unités.

En conclusion, il faut vendre 275 unité pour atteindre le seuil

b) Si maintenant les fonctions **demande** et **offre** (en milliers de verts) sont données respectivement par

$$D(p) = -2p^2 + 45p \qquad \text{et} \qquad S(p) = 15p + 100$$

où p est le prix par unité produite, trouvez le(s) prix d'équilibre.

Pour cela on résoud $D(p) = S(p)$

$\iff -2p^2 + 45p = 15p + 100$

$\iff 2p^2 - 30p + 100 = 0$

(Divisez par 2) $\iff p^2 - 15p + 50 = 0$

$\iff (p-5)(p-10) = 0 \iff \boxed{p = 5 \text{ ou } p = 10}$

qui sont les prix d'équilibre.

Question 8: [5pts]

Une banque accepte de vous prêter 10 000 $ en retour d'un remboursement de 13 000 $ sur 6 ans. On supposant que l'intérêt annuel r est composé **continuellement**.

a) Donnez l'expression de la fonction valeur $v(t)$ correspondante.

$$V(t) = 10000 e^{rt}.$$

b) Quel est le taux d'intérêt annuel r? Exprimez votre réponse en logarithme naturel.

On a : $V(6 \text{ ans}) = 13\,000 = 10000\, e^{r6}$

$$\Longleftrightarrow e^{r6} = 13/10 = 1.3$$

Composez par $\ln(x)$ pour obtenir

$$r6 = \ln(1.3)$$

soit $\boxed{r = \frac{1}{6} \ln(1.3)}$ est le taux d'intérêt.