Solutionnaire

Question	1	2	3	4	5	6	Total
Note							
Sur un maximum de	3	3	4	2	4	2	18 points

Exercice 1 (3 points): Soit le système suivant :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + w = -3 \\ 2x - y + 3z - w = 0 \end{cases}$$

Déterminer et écrire la solution générale de ce système sous la forme paramétrique.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad L_2 \to L_2 - 2L_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 6 \end{array}\right] \quad L_2 \to L_2 / 3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \quad L_1 \to L_1 + 2L_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$z = t \to$ libre

$w = s \to$ libre.

infinité de solutions

d'où $y = 2 + z + w = 2 + t + s$

$x = 1 - z + w = 1 - t + s$

d'où la solution générale est

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - t + s \\ 2 + t + s \\ t \\ s \end{pmatrix}$$

Exercice 2(3 point) : Soit le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ kx + y = k \end{cases}$$

(a) **(2 points) Déterminer la valeur de k pour que ce système admette une solution unique.**

(b) **(1 point) Donner l'expression de cette solution en fonction de k**

(a) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ k & 1 & k \end{array}\right]$ $\quad L_2 \longrightarrow L_2 - kL_1$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1-k & \cancel{k}-3k \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1-k & -2k \end{array}\right]$$

pour que ce système admette une solution unique il faut que $1-k \neq 0 \Rightarrow k \neq 1$

(b) et alors la solution est $\boxed{y = \frac{-2k}{1-k}}$ et $x = 3 - y = 3 + \frac{2k}{1-k} = \frac{3(1-k)+2k}{1-k}$

$$\boxed{x = \frac{3 \cancel{-} k}{1-k}}$$

Exercice 3(4 point): Soient les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix};\ \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix};\ \vec{w} = \begin{pmatrix}3\\1\\-2\\2\end{pmatrix};\ \ \vec{z} = \begin{pmatrix}4\\2\\-1\\3\end{pmatrix}\ \ et\ \vec{k} = \begin{pmatrix}2\\3\\2\\2\end{pmatrix}$$

Est-ce que le vecteur $\vec{k}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\{\vec{u};\ \vec{v};\ \vec{w}; \vec{z}\}$, c'est-à-dire est ce que le vecteur $\vec{k} \in Span\{\vec{u};\ \vec{v};\ \vec{w}; \vec{z}\} = \mathcal{L}\{\vec{u};\ \vec{v};\ \vec{w}; \vec{z}\}$? Justifiez votre réponse.

si $\vec{k} \in \mathcal{L}(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}, \vec{z})$ alors le système serait compatible

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

$$[A \mid \vec{k}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_3 \to L_3 - L_1 \\ L_4 \to L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_3 \to L_3/-5 \\ L_4 \to L_4/-1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad L_3 \to L_3 - L_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ce système admet une infinité de solutions donc compatible donc $\vec{k} \in \mathcal{L}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z})$

Exercice 4 (2 points) :

Calculer la combinaison des vecteurs suivante :

$$\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix}0\\3\\1/5\end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix}0\\3\\1/5\end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\15\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\-7\\28\end{pmatrix}$$

$$= \underline{\begin{pmatrix}8\\-19\\33\end{pmatrix}}$$

Exercice 5 (4 points) : Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = -4 \\ x + \quad z = 2 \\ 2x + 2y + az = b \end{cases}$$

Où a et b sont deux nombres réels.

Déterminer les valeurs de a et b telles que le système :

(a)Admette une solution unique.

(b) Admette une infinité de solutions.

(c) N'admette aucune solution.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & a & b \end{array}\right] \quad L_2 \leftrightarrow L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & a & b \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 \to L_2 + L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & a-2 & b-4 \end{array}\right]$$

$$L_3/3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2/3 \\ 0 & 2 & a-2 & b-4 \end{array}\right] \quad L_3 \to L_3 - 2L_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & a-4 & b-\frac{8}{3} \end{array}\right]$$

(a) si $\underline{a \neq 4}$; le système admet une solution unique

(b) si $a = 4$ et $b = \frac{8}{3}$ le système admet une infinité de solution

(car la variable z serait libre)

(c) si $a = 4$ et $b \neq \frac{8}{3}$ le système n'admet aucune solution

Exercice 6 (2 points) : Soient des vecteurs de même dimensions tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{v_1} - 2\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}$ et $\vec{w} = -2\overrightarrow{v_1} + 3\overrightarrow{v_2} - 5\overrightarrow{v_3}$. Exprimer $\vec{u} + 4\,\vec{w}$ comme combinaison linéaire de $\{\overrightarrow{v_1};\ \overrightarrow{v_2};\ \overrightarrow{v_3}\}$.

$$\vec{u} = \vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

$$4\vec{w} = -8\vec{v}_1 + 12\vec{v}_2 - 20\vec{v}_3$$

donc

$$\boxed{\vec{u} + 4\vec{w} = -7\vec{v}_1 + 10\vec{v}_2 - 19\vec{v}_3}$$