Introduction à l'Algèbre linéaire (MAT1741 D)
EXAMEN PARTIEL PRATIQUE IV. (Hiver 2016)
Professeur: Joseph Khoury Durée: 80 minutes

Nom de famille: Solutions

Prénom:

Numéro d'étudiant:

Aucune note n'est permise.
Les calculatrices non programables sont permises.

Cet examen comporte 8 questions et 10 pages. Les questions à choix multiples (1 à 5) valent chacune 2 points sur les 26 points que compte l'examen. Inscrire à l'ENCRE dans les cases ci-dessous les LETTRES correspondant aux réponses à ces questions.

1	2	3	4	5

Les questions 6 à 8 sont à développement et requièrent une réponse détaillée. Prenez soin de bien rédiger votre solution. Vous pouvez utiliser le verso des pages et les pages additionnelles si vous manquez d'espace au recto.

1. Parmi les ensembles suivants, un seul est une **base** de l'espace $\mathbb{P}_3$ de tous les polynômes de degré au plus 3.

A. $\{1,\ 1-x^2+x^3, 3-2x^2+2x^3,\ x^3\}$ Non vecteurs linéairement dépendants
B. $\{1+x+x^2+x^3\}$ Non un seul vecteur
C. $\{1, 1+x, 1+x^2, x+x^2+x^3\}$ oui 4 vecteurs linéairement indépendants.
D. $\{1,\ 1+x+x^3,\ 1+x^2+x^3,\ 3+x+x^2+2x^3\}$ Non vecteurs l. dép.
E. $\{x+x^3,\ 1+x^3\}$ Non seulement deux vecteurs
F. $\{1, 1+x, 1+x^2, x+x^2, 1-x^3\}$ Non contient 5 vecteurs

$\dim \mathbb{P}_3 = 4$. Chaque base de $\mathbb{P}_3$ doit contenir 4 polynômes lin. indépendants.

A) N'est pas une base $3-2x^2+2x^3 = 1.(1)+2(1-x^2+x^3)$

B) N'est pas une base contient un seul vecteur

C) C'est une base $a(1)+b(1+x)+c(1+x^2)+d(x+x^2+x^3)=0 \Rightarrow a+b=0,\ b+d=0,\ c+d=0,\ d=0$ on conclut que $a=b=c=d=0$. Les vecteurs sont l. ind. Comme l'ensemble contient 4 vecteurs et $\dim \mathbb{P}_3 = 4$, c'est une base de $\mathbb{P}_3$.

D) N'est pas une base $3+x+x^2+2x^3 = 1.(1)+1.(1+x+x^3)+1.(1+x^2+x^3)$

E) N'est pas une base contient seulement deux vecteurs

F) N'est pas une base contient 5 vecteurs

2. Considérer les trois fonctions f, g et h de l'espace $\mathbb{F}(]-2,+\infty[,\mathbb{R})$ définies par

$$f(x) = \frac{1}{x+2},\quad g(x) = \frac{x}{(x+2)(x^2+1)},\quad h(x) = \frac{\alpha x^2+6x+2}{(x+2)(x^2+1)}.$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour quelle valeur de α, la fonction h appartient-elle à l'enveloppe linéaire des fonctions f et g?

A. 0
B. 5
C. 2
D. 1
E. N'importe quelle valeur de α
F. 3

On veut trouver deux constantes a, b telles que $h(x) = af(x)+bg(x)$ pour tout $x \in]-2,+\infty[$:

$$\frac{\alpha x^2+6x+2}{(x+2)(x^2+1)} = a\frac{1}{x+2} + b\frac{x}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{a(x^2+1)+bx}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{ax^2+bx+a}{(x+2)(x^2+1)}.$$

Alors $\alpha x^2+6x+2 = ax^2+bx+a \Rightarrow \alpha = a,\ b=6,\ a=2$. Alors $\boxed{\alpha = 2}$

3. Pour quelle(s) valeur(s) de m, les vecteurs

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ m \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

sont **linéairement indépendants** dans $\mathbb{R}^4$?

A. $m \neq 1$
B. Aucune des autres réponses
C. $m = 0$
D. $m = -1$
E. $m \neq -1$
F. $m = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & m & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 + L_2 \to L_2 \\ \sim \\ -2L_1 + L_3 \to L_3 \\ (-1)L_1 + L_4 \to L_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & m-1 & 3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_2 + L_3 \to L_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & m-1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftrightarrow L_4 \\ \sim \\ \frac{1}{6}L_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & m-1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs sont linéairement indépendants si le système homogène $AX = 0$ admet une solution unique (la solution triviale) $\Leftrightarrow rg(A) = 4 \Leftrightarrow m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

4. Dans chaque cas, V est un espace vectoriel, U un sous-ensemble de V. Dans quels cas U est un sous-espace de V?

(1) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x^2 + y^4 + z^6 + t^8 = 0\}$. Sous-espace

(2) $V = \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $U = \{f \in V;\ f(2)(f(-3))^2 = 0\}$. N'est pas fermé sous l'addition

(3) $V = \mathbb{M}_{22}$, $U = \{A \in V;\ A^2 = 0\}$. N'est pas fermé sous l'addition

(4) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{X \in V;\ AX = 2X\}$ où A est une matrice 3×3 fixe. Sous-espace

(5) $V = \mathbb{P}_2$, $U = \{p(x) \in V;\ p(0) \geq 0\}$. N'est pas fermé sous la multiplication par un scalaire

A. (2) et (5)
B. (4) seulement
C. (3) seulement
D. (1) et (4)
E. (1), (2) et (5)
F. (3) et (4)

(1) U est un sous-espace. Notez que $x^2 + y^4 + z^6 + t^8 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = t = 0 \Rightarrow$ $U = \{(0,0,0,0)\}$ C'est le sous-espace trivial de $\mathbb{R}^4$

(2) N'est pas un sous-espace. $f(x) = x - 2 \in U$, $g(x) = x + 3 \in U$. Mais $f(x) + g(x) = 2x + 1$ $\notin U$. Donc U n'est pas fermé sous l'addition.

(3) N'est pas un sous-espace. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in U$ car $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in U$ car $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Mais $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \notin U$. Alors U n'est pas fermé sous l'addition.

(4) U est un sous-espace. $U = \{X \in \mathbb{R}^3;\ (A - 2I)X = 0\}$: espace des solutions d'un système homogène.

(5) N'est pas un sous-espace. $p(x) = x^2 + 1 \in U$ car $p(0) = 1 \geq 0$. Mais $-2p(x) = -2x^2 - 2 \notin U$. Alors U n'est pas fermé sous la multiplication par un scalaire.

5. Soit V un espace vectoriel, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ et v des vecteurs dans V. Parmi les énoncés suivants, deux sont vrais. Lesquels?

(1) Si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont linéairement indépendants mais $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ ne le sont pas, alors v est un multiple scalaire d'au moins un des vecteurs v_i.

(2) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont linéairement indépendants si la condition suivante est satisfaite: "$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ implique que $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots a_nv_n = 0$".

(3) Si $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots a_nv_n = 0$ est seulement possible lorsque $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, alors $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont linéairement indépendants.

(4) Si $v \in \text{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, alors au moins un des vecteurs v_i est un multiple scalaire de v.

(5) Si $v \in \text{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, alors $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ sont linéairement dépendants.

(6) Si $v_i \neq v_j$ pour tout $i \neq j$, alors $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ est linéairement indépendant.

A. (1) et (6) **B.** (3) et (4) **C.** (2) et (6)
D. (2) et (5) **E.** (3) et (5) **F.** (1) et (2)

(1) Faux $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$ sont l. ind. Soit $v = (1,1) = v_1 + v_2$. Alors $\{v_1, v_2, v\}$ est linéairement dépendants. Mais v n'est pas un multiple de v_1 ou de v_2

(2) Faux Si $a_1 = \cdots = a_n = 0$, il est clair que $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$ pour n'importe quels vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ (lin. indép. ou non). La vraie définition est :
$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$ implique que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$

(3) Vrai C'est la définition de l'indépendance linéaire.

(4) Faux $v = (1,1) \in \text{Span}\{v_1 = (1,0), v_2 = (0,1)\}$ car $v = v_1 + v_2$. Mais ni v_1, ni v_2 est un multiple de v.

(5) Vrai $v \in \text{Span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \Rightarrow$
$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n + (-1) v = 0$. Alors $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ sont lin. dépendants.

(6) Faux $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (2,0)$, alors $v_2 \neq v_1$ mais $\{v_1, v_2\}$ est l. dépendants.

6. [6 points] Considérer les quatre fonctions f, g, h et k de l'espace $\mathbb{F}\left(\left[0, \frac{3}{2}\pi\right], \mathbb{R}\right)$ définies par:

$$f(x) = x^2, \;\; g(x) = \cos^2 x, \;\; h(x) = \sin^2 x, \;\; k(x) = \cos 2x \qquad \forall x \in [0, 2\pi].$$

(1) Montrer que $\{f, g, h\}$ est linéairement indépendant.

(2) Utiliser la partie précédente pour montrer que $\{f+g, f+h\}$ est aussi linéairement indépendant.

(3) Donner une base et la dimension de l'espace $U = \text{span}\{f, g, h, k\}$ (Indication: Utiliser l'identité $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$).

(4) Si ϕ et ψ sont deux éléments de $U = \text{span}\{f, g, h, k\}$, peut-on avoir $U = \text{span}\{\phi, \psi\}$?

(1) $af + bg + ch = 0 \Rightarrow ax^2 + b\cos^2 x + c\sin^2 x = 0$ pour tout $x \in [0, 3\pi/2]$.

$\underline{x=0}$ $\quad a\,0^2 + b\cos^2 0 + c\underbrace{\sin^2 0}_{0} = 0 \Rightarrow b = 0$

$\underline{x=\pi}$ $\quad a\pi^2 + b\cos^2\pi + c\sin^2\pi = 0 \Rightarrow \pi^2 a + \underbrace{b}_{0} = 0 \Rightarrow \pi^2 a = 0 \Rightarrow a = 0$

$\underline{x=3\pi/2}$ $\quad a(3\pi/2)^2 + b\underbrace{\cos^2 3\pi/2}_{0} + c\underbrace{\sin^2(3\pi/2)}_{1} = 0 \Rightarrow \frac{9\pi^2}{4}\underset{0}{a} + c = 0 \Rightarrow c = 0$

$\Rightarrow a = b = c = 0$

Alors $\{f, g, h\}$ est linéairement indépendant.

(2) $a(f+g) + b(f+h) = 0 \Rightarrow af + ag + bf + bh = 0 \Rightarrow (a+b)f + ag + bh = 0$.
Comme f, g, h sont linéairement indépendants, on conclut que $a+b=0$, $a=0$, $b=0$.
Donc $a = b = 0$; et $\{f+g, f+h\}$ est lin. indép.

(3) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = (1)f + (-1)g$. D'où $k(x) \in \text{span}\{f, g, h\}$ car on peut écrire $k(x) = (1)f + (-1)g + (0)h$. On conclut que $\text{span}\{f, g, h, k\} = \text{span}\{f, g, h\}$. Comme f, g, h sont l. ind. (par (1)), ils forment une base de U. Alors $\dim U = 3$

(4) $\underline{\text{Non}}$ $\dim U = 3$, alors il faut au moins 3 vecteurs pour former un système générateur de U.

7. [5 points] Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{22}$.

(1) Montrer que
$$U = \{X \in \mathbf{M}_{22}; A^{-1}X = XA^T\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_{22}(\mathbb{R})$.

(2) Trouver une base et donner la dimension de U.

(3) Si $u, v, w, z \in U$, le sous-ensemble $\{u, v, w, z\}$ peut-il être linéairement indépendant?

(1) $A^{-1} = \frac{1}{3-2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ et $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Alors

$$U = \left\{ X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{22};\ \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{22};\ \begin{bmatrix} 3a-c & 3b-d \\ -2a+c & -2b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 2a+3b \\ c+d & 2c+3d \end{bmatrix} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{22};\ \begin{matrix} 3a-c = a+b \\ 3b-d = 2a+3b \end{matrix}\ ;\ \begin{matrix} -2a+c = c+d \\ -2b+d = 2c+3d \end{matrix} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{22};\ \begin{matrix} 2a-b-c=0 \\ 2a+d=0 \\ 2a+d=0 \\ 2b+2c+2d=0 \end{matrix} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$c = s$, $d = t$ sont libres
$a = -\frac{1}{2}t$, $b = -s-t$. D'où

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t & -s-t \\ s & t \end{bmatrix};\ s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$ C'est un sous-espace de $\mathbb{M}_{22}$

2) On a que $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ est un système générateur de U. De plus, ces deux matrices sont linéairement indépendantes car une n'est pas un multiple scalaire de l'autre.

Donc, $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ est une base de U et $\dim U = 2$.

(3) Non car $\dim U = 2$ et $\{u, v, w, z\}$ contient 4 vecteurs (Rappel : dans un espace vectoriel de dimension n, un ensemble contenant plus que n vecteurs est linéairement dependant)

8. [6 points] Considérer la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -3 & 10 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(1) Trouver une base et donner la dimension de de l'espace-colonne de A.

(2) Trouver une base et donner la dimension de de l'espace-ligne de A.

(3) Trouver une base et donner la dimension du noyau de A.

On trouve la forme échelonnée réduite de A :

$$A \underset{(-1)L_1+L_5\to L_5}{\overset{-3L_1+L_3\to L_3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \overset{(-1)L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_2+L_5\to L_5}{\overset{L_2+L_4\to L_4}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{2L_3+L_4\to L_4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{2L_3+L_2\to L_2}{\overset{-3L_3+L_1\to L_1}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{-2L_2+L_1\to L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad (*)$$

(1) Une base de l'espace-colonne de A est formée des colonnes de la matrice A qui correspondent aux colonnes-pivot. D'où une base de $Col(A)$ est

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 10 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right\} \text{ et } \dim Col(A) = 3$$

(2) une base de l'espace-ligne de A est formée par les lignes-pivot de la forme $(*)$ (ou par les lignes correspondantes de A)

Base de l'espace-ligne $= \{(1,0,1,0,6,-2), (0,1,-1,0,-1,0), (0,0,0,1,-1,1)\}$

et $\dim(Ligne(A)) = 3$.

3) Le noyau de A est l'ensemble des solutions du système homogène $AX = 0$. D'après la forme (*), on voit que $x_3 = s$, $x_5 = t$, $x_6 = u$ sont des variables libres, et on a

$x_1 = -s - 6t + 2u$, $x_2 = s + t$ et $x_4 = t - u$.

$$\ker(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -s-6t+2u \\ s+t \\ s \\ t-u \\ t \\ u \end{bmatrix} ; s,t,u \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{u}_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{u}_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{u}_3} \right\}$$

On voit que les vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ sont linéairement indépendants. Alors $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ est une base de $\ker A$ et $\dim(\ker A) = 3$.