MAT 1700 – Examen Pratique I

Enseignante: Yasmine Samia

NOM____

D'ETUDIANT____

Instructions: Cet examen consiste en 5 questions à choix multiples, 5 questions à développement, pour un total de 10 questions sur 8 pages. La valeur de chaque question est indiquée au début de chacune des questions. La valeur totale de l'examen est 30 .

SVP écrivez vos réponses aux questions à choix multiples dans les cases ci-dessous. Seules ces réponses finales compteront pour des points. Vous pouvez utiliser le verso des pages comme brouillon, ou feuilles de réponses en l'indiquant clairement.

Durée: 80 minutes

PAS DE CELLULAIRES. PAS DE LIVRES. PAS DE NOTES DE COURS.

Réponses aux questions à choix multiples:

B	C	A	D	C
#1	#2	#3	#4	#5

Questions à choix multiples

1. (1 point) Calculez la limite suivante

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-9}{|x-3|}$$

A. 6 B. -6 C. N'existe pas D. -3 E. 0

• $|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \\ -(x-3) & \text{si } x-3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3 \end{cases}$

• $\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-9}{|x-3|} = \lim_{x\to 3^-} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{-\cancel{(x-3)}} = \lim_{x\to 3^-} -(x+3) = -6.$

2. (1 point) Trouvez la pente de la droite tangente au graphe de $y = -\sqrt{4x+1}$ quand $x = 0$.

A. 0 B. -1 C. -2 D. 2 E. 1

• La pente est donnée par $y' = \frac{dy}{dx}$.

$\Rightarrow y' = \left[-\sqrt{4x+1}\right]' = \left[-(4x+1)^{1/2}\right]' = -\left(\frac{1}{2}\right)\cdot(4x+1)^{-1/2}\cdot(4)$.

$= -\frac{4}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4x+1}} = -\frac{2}{\sqrt{4x+1}}$.

• Pour $x=0 \Rightarrow y' = -\frac{2}{1} = -2$.

3. (1 point) Quel est le seuil de rentabilité pour une compagnie dont les fonctions coût et revenu sont

$$C(x) = 10x + 10,000, \;\; R(x) = 20x$$

A. $x = 1000$, $R = 20,000$
B. $x = 1000/3$, $R = 20,000/3$
C. $x = 10,000$, $R = 200,000$
D. Aucune de ces réponses

• $C(x) = R(x)$

$10x + 10000 = 20x$

$10000 = 10x$

$\boxed{1000 = x}$

• $R(1000) = 20.(1000) = 20000$.

4. (1 point) Le coût marginal de $C(x) = \sqrt{x}(-x+2)^3$ pour $x = 1$ est

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{-3}{2}$ C. $\frac{7}{2}$ D. $\frac{-5}{2}$ E. Aucune de ces réponses.

$$C'(x) = (\sqrt{x})' \cdot (-x+2)^3 + \sqrt{x} \cdot \left[(-x+2)^3\right]'$$
$$= (x^{1/2})' \cdot (-x+2)^3 + \sqrt{x} \cdot \left[3(-x+2)^2 \cdot (-1)\right]$$
$$= \frac{1}{2}x^{-1/2} \cdot (-x+2)^3 + \sqrt{x}\left[-3(-x+2)^2\right]$$
$$= \frac{(-x+2)^3}{2\sqrt{x}} - 3\sqrt{x}(-x+2)^2$$

$$\Rightarrow C'(1) = \frac{(-1+2)^3}{2.(1)} - 3(1).(-1+2)^2 = \frac{1}{2} - 3(1) = \frac{1}{2} - 3$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{6}{2} = -\frac{5}{2}$$

5. (1 point) Le domaine de $g(x) = \ln(x^2 - 1)$ est

A. $x \in [-1, 1]$
B. $x \in (-\infty, 1] \cup [1, \infty)$
C. $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
D. $x \in (-\infty, \infty)$
E. $x \in (-1, 1)$

Il faut que $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) > 0$.

x		-1		1	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-1)(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow D_g = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Remarquez que -1 et 1 ne sont pas incluses puisque $x^2 - 1 > 0$ strictement

Questions à réponses longues

6. (5 points) En utilisant la définition de la dérivée, trouvez $f'(x)$, pour

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{3}{2}x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{1-\frac{3}{2}(x+\Delta x)} - \sqrt{1-\frac{3}{2}x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{3}{2}(x+\Delta x)} + \sqrt{1-\frac{3}{2}x}}{\sqrt{1-\frac{3}{2}(x+\Delta x)} + \sqrt{1-\frac{3}{2}x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1-\frac{3}{2}(x+\Delta x) - \left(1-\frac{3}{2}x\right)}{\Delta x\left[\sqrt{1-\frac{3}{2}(x+\Delta x)} + \sqrt{1-\frac{3}{2}x}\right]}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{1} - \cancel{\frac{3}{2}x} - \frac{3}{2}\Delta x - \cancel{1} + \cancel{\frac{3}{2}x}}{\Delta x\left[\sqrt{1-\frac{3}{2}(x+\Delta x)} + \sqrt{1-\frac{3}{2}x}\right]}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\frac{3}{2}\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\left[\sqrt{1-\frac{3}{2}(x+\Delta x)} + \sqrt{1-\frac{3}{2}x}\right]}$$

$$= \frac{-3/2}{\sqrt{1-\frac{3}{2}x} + \sqrt{1-\frac{3}{2}x}} = -\frac{3/2}{2\sqrt{1-\frac{3}{2}x}}$$

$$= -\frac{3}{4\sqrt{1-\frac{3}{2}x}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = -\frac{3}{4\sqrt{1-\frac{3}{2}x}}}$$

8. (5 points) Pour quelle valeur de a la fonction suivante

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 3 \\ 2xa, & x \geq 3, \end{cases}$$

est continue sur $(-\infty, \infty)$?

- La fonction est continue partout sauf possiblement en $x = 3$. Pour que cette fonction soit continue en $x = 3$ (et ainsi partout sur $(-\infty, +\infty)$), il faut que la $\lim_{x \to 3} f(x)$ existe et soit égale à $f(3)$.

Ainsi :

- $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (x^2 - 1) = 8$
- $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (2xa) = 6a$
- $f(3) = 2(3) \cdot a = 6a$.

Donc on doit avoir $6a = 8 \Rightarrow \boxed{a = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}}$.

$\Rightarrow$ Alors pour $a = \frac{4}{3}$, la fonction $f(x)$ est continue partout sur $\mathbb{R}$.

7. Calculez les limites suivantes, si elles existent

(a) (3 points) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{-\cancel{(x-1)}}$

$= \lim\limits_{x\to 1} -(x+3) = -(1+3) = -4.$

(b) (2 points) $\lim\limits_{y\to +\infty} \dfrac{2-3y^2}{5y^2+4} = -\dfrac{3}{5}$ car le numérateur et dénominateur sont du même degré

9. (a) (2 points) Trouvez la réciproque de

$$f(x) = \frac{e^x}{1+2e^x}.$$

$$y = \frac{e^x}{1+2e^x} \Rightarrow x = \frac{e^y}{1+2e^y} \Rightarrow x(1+2e^y) = e^y$$

$\Rightarrow x + 2xe^y = e^y$

$\Rightarrow 2xe^y - e^y = -x$

$\Rightarrow (2x-1)e^y = -x$

$\Rightarrow e^y = \dfrac{-x}{2x-1}$

$\Rightarrow \ln e^y = \ln\left(\dfrac{-x}{2x-1}\right)$

$\Rightarrow y = \ln\left(\dfrac{x}{1-2x}\right).$

Donc $\boxed{f^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{x}{1-2x}\right)}$

(b) (2 points) Trouvez la limite suivante:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+2e^x}$$

- Notez que $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.
- Ainsi, si on remplaçait $\lim_{x\to+\infty} e^x$ par $+\infty$, on obtient une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. On cherche alors à factoriser et simplifier notre expression.

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+2e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\left(\frac{1}{e^x}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(e^{-x}+2)}$$

$$= \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2}.$$

10. Les questions suivantes sont indépendantes

(a) (2 points) Résoudre l'équations suivante:

$$4^x = 3^{x+1}$$

$$\ln(4^x) = \ln(3^{x+1})$$
$$x \ln 4 = (x+1)\ln 3$$
$$x \ln 4 = x \ln 3 + \ln 3$$
$$x(\ln 4 - \ln 3) = \ln 3$$
$$\boxed{x = \frac{\ln 3}{\ln 4 - \ln 3}}.$$

(b) (2 points) Une somme de 2000$ est déposée dans un compte de banque qui rapporte un intérêt de 3% composé continuellement. Dans combien de temps cette somme triplera-t-elle?

$A = Pe^{rt}$ avec $A = 6000$, $P = 2000$, $r = 0.03$.

$\Rightarrow 6000 = 2000\, e^{0.03t}$

$\Rightarrow 3 = e^{0.03t}$

$\Rightarrow \ln 3 = \ln e^{0.03t}$

$\Rightarrow \ln 3 = 0.03t. \Rightarrow \boxed{t = \frac{\ln 3}{0.03}}.$

(c) (2 points) Trouvez $\dfrac{dy}{dx}$ au point (1,2) pour la fonction suivante:

$$x^3y^2 + 4x^2 = y + 6$$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}[x^3y^2 + 4x^2] = \frac{d}{dx}[y+6]$

$\Rightarrow 3x^2y^2 + x^3 \cdot \frac{d}{dx}[y^2] + 8x = \frac{dy}{dx} + 0$

$\Rightarrow 3x^2y^2 + x^3 \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dx} + 8x = \frac{dy}{dx}.$

• Pour $(1,2) \Rightarrow 3(1)(4) + (1)(2)(2)\frac{dy}{dx} + 8(1) = \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow 12 + 4\frac{dy}{dx} + 8 = \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow 3\frac{dy}{dx} = -20$

$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-20}{3}}$