

Examen Final (solutionnaire) MAT 2777 (Hiver 2016)

Question	Réponse	Question	Réponse
1	A	9	B
2	B	10	E
3	A	11	C
4	B	12	E
5	B	13	B
6	B	14	A
7	D	15	A
8	A		

**Questions à choix multiples (2 points/question pour un total de 30 points)**

*S'il vous plaît entrer vos choix dans le cahier-réponse.*

1. Un détecteur de fumée se compose de deux parties A et B. Si la fumée se produit alors l'élément A identifie la fumée avec une probabilité de 0,95, l'élément B identifie la fumée avec une probabilité de 0,98 alors que les deux identifient simultanément la fumée avec une probabilité de 0,94. Quelle est la probabilité que la fumée ne sera pas identifiée? (N.B. Le détecteur de fumée identifie la fumée si au moins un des deux éléments identifie la fumée.)

A) 0,01      B) 0,99      C) 0,04      D) 0,96      E) 0,98

Solution : On a  $P(A) = 0,95$ ,  $P(B) = 0,98$ ,  $P(A \cap B) = 0,94$ . Then

$$P(\text{pas identifier la fumée}) = 1 - P(\text{la fumée est identifiée})$$

$$= 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 0,01.$$

La réponse est A.

2. Une boîte de 20 ampoules contient cinq ampoules défectueuses. Nous cueillons 2 ampoules sans remise. Trouver la probabilité qu'aucune des ampoules soit défectueuse.

A) 0,447      B) 0,553      C) 0,442      D) 0,998      E) 0,663

Solution : Soit  $X$  le nombre d'ampoules défectueuses dans l'échantillon de taille  $n = 2$ . On veut

$$P(X = 0) = \frac{\binom{15}{2} \binom{5}{0}}{\binom{20}{2}} = 0,553.$$

La réponse est B.

3. Soient  $X_1, X_2, \dots, X_{15}$  un échantillon aléatoire d'une population normale de moyenne 10. Soit  $\bar{X}$  la moyenne de l'échantillon et soit  $S$  l'écart type de l'échantillon. Calculer la probabilité suivante :

$$P\left(\frac{\bar{X} - 10}{S/\sqrt{15}} > -1,761\right).$$

A) 0,95      B) 0,975      C) 0,025      D) 0,05      E) 0,075

Solution : La variable aléatoire  $T = (\bar{X} - 10)/(S/\sqrt{15})$  suit une loi  $T(14)$ . On veut

$$\begin{aligned} P(T > -1,761) &= P(T < 1,761) \quad (\text{par la symétrie}) \\ &= 0,95, \end{aligned}$$

puisque  $t_{0,05;14} = 1,761$ . La réponse est A.

4. Voici la fonction masse de probabilité conjointe pour  $(X, Y)$  :

$y \backslash x$	3	4	5
0	$\frac{1}{45}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{5}{45}$
1	$\frac{8}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{7}{45}$
2	$\frac{3}{45}$	$\frac{9}{45}$	$\frac{4}{45}$

Déterminer  $P(Y \geq 1|X = 5)$ .

A) 0,4667      B) 0,6875      C) 0,3125      D) 0,9375      E) 0,4375

Solution :

$$\begin{aligned}
 P(Y \geq 1|X = 5) &= \frac{P(Y \geq 1, X = 5)}{P(X = 5)} \\
 &= \frac{p_{XY}(5, 1) + p_{XY}(5, 2)}{p_{XY}(5, 1) + p_{XY}(5, 1) + p_{XY}(5, 2)} \\
 &= \frac{(7 + 4)/45}{(5 + 7 + 4)/45} = 11/16 = 0,6875.
 \end{aligned}$$

La réponse est B.

5. Une machine produit des pièces métalliques qui sont cylindriques. Un échantillon de 10 pièces est cueilli et on calcul le diamètre de chacune des pièces. La moyenne de l'échantillon et l'écart type de l'échantillon sont respectivement  $\bar{x} = 1,009$  et  $s = 0,0256$ . Donner un intervalle de confiance à 99% pour le diamètre moyen. Supposons que le diamètre est normalement distribué.

A) [0,989; 1,022]    B) [0,983; 1,035]    C) [0,991; 1,034]    D) [0,987; 1,024]  
 E) [0,981; 1,019]

Solution : Un intervalle de confiance à 99% pour  $\mu$  est

$$\bar{x} \pm t_{0,005;9} \frac{s}{\sqrt{n}} = [0,983; 1,035].$$

où  $t_{0,005;9} = 3,250$ . La réponse est B.

6. Une compagnie d'assurance estime que les gens peuvent être divisés en deux catégories : ceux qui sont enclins aux accidents et ceux qui ne le sont pas. Supposons que 30% de la population est enclin aux accidents. Leurs statistiques montrent qu'une personne enclin aux accidents aura un accident pendant une période d'un an avec une probabilité de 0,4. Cependant cette probabilité est seulement 0,2 pour une personne qui n'est pas enclin aux accidents. Supposons qu'un nouveau client de cette compagnie d'assurance a un accident durant la première année de la couverture d'assurance. Quelle est la probabilité que ce nouveau client est enclin aux accidents ?

A) 0,67      B) 0,46      C) 0,75      D) 0,5      E) 0,26

Solution : Soit  $A_1$  l'événement qu'un nouveau client aura un accident durant la première année de la couverture d'assurance et soit  $A$  que le client est enclin aux accidents. On veut

$$P(A|A_1) = \frac{P(A \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{P(A)P(A_1|A)}{P(A_1)} = \frac{(0.3)(0.4)}{(0.26)} = 0.46,$$

où

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(A_1|A)P(A) + P(A_1|A')P(A') \\ &= (0,4)(0,3) + (0,2)(0,7) = 0,26. \end{aligned}$$

La réponse est B.

7. Selon la loi, toutes les nouvelles voitures doivent être équipées de coussins gonflables de sécurité à la fois du côté du conducteur et du côté du passager. Il est à craindre, cependant, de savoir si les sacs gonflables représentent un danger pour les enfants assis sur le côté du passager. Dans une étude de 55 personnes tuées par la force explosive de sacs gonflables, 35 étaient des enfants assis sur le côté du passager. Soit  $p$  la proportion réelle d'accidents d'automobiles mortels impliquant des enfants assis sur le côté du passager. Construire un intervalle de confiance à 99% pour  $p$ .

A) [0,51; 0,76]      B) [0,98; 1,04]      C) [0,99; 1,03]      D) [0,47; 0,80]  
E) [0,98; 1,02]

*Solution* : La proportion de l'échantillon est  $\hat{p} = \frac{35}{55} = 0,6363$ . Un intervalle de confiance pour  $p$  est

$$\begin{aligned}\hat{p} \pm z_{0,005} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} &= 0,636 \pm 2,575 \sqrt{\frac{0,636(0,364)}{55}} \\ &= 0,636 \pm 0,167 = [0,47; 0,80].\end{aligned}$$

La réponse est D.

8. Une machine utilisée pour contrôler la quantité d'un mélange de peinture peut être réglé de telle sorte qu'il remplisse une moyenne de  $\mu$  millilitres (mL) de colorant par boîte de peinture. La quantité de colorant libéré suit une loi normale avec un écart type de  $\sigma = 0,4$  mL. Si plus de 6 mL de colorant pour un mélange de bleus est inacceptable, Déterminer le réglage de  $\mu$  de sorte que seulement 10 % des boîtes de peinture bleu sera inacceptable.

A) 5,49      B) 1,28      C) 4,32      D) 7,31      E) 5,74

*Solution* : Soit  $X$  la quantité de colorant en mL.  $X$  suit une loi normale d'écart type 0,4. On veut  $\mu$  tel que  $P(X > 6) = 0,1$ . Ceci est équivalent à  $\mu$  tel que

$$P(X < 6) = P\left(Z < \frac{6 - \mu}{0,4}\right) = 0,9.$$

Du tableau, on a

$$1,28 = \frac{6 - \mu}{0,4} \Rightarrow \mu = 6 - (1,28)(0,4) = 5,488 \approx 5,49.$$

La réponse est A.

9. Les nombres de passagers (en milliers) traités en été 2015 par un bateau de croisière de Port Canaveral (Floride) sont affichés ci-bas pour 9 jours choisis au hasard. Calculer l'étendue de l'échantillon et l'écart type de l'échantillon pour l'échantillon suivant :

100 4 7 96 80 3 1 10 2.

- A) étendue = 100 et  $s = 41,63$       B) étendue = 99 et  $s = 44,15$   
 C) étendue = 99 et  $s = 41,63$       D) étendue = 98 et  $s = 1949,25$   
 E) étendue = 100 et  $s = 1949,25$

*Solution :*

$$\text{étendue} = \max - \min = 100 - 1 = 99.$$

L'écart type est

$$s = \sqrt{\frac{(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2/n}{n-1}} = \sqrt{\frac{(25795) - (303)^2/9}{8}} = 44,15031 \approx 44,15.$$

La réponse est B.

10. Un fabricant d'appareils électroniques étudie le temps en panne des appareils. Les 8 clients les plus récents ont été interrogés afin de déterminer la quantité du temps en panne (en heures) de leur appareil au cours du dernier mois. Voici les données :

28 26 21 16 28 34 57 0.

Quel énoncé est vrai ? (Seulement un énoncé est vrai.)

- A) DIQ=12,5; 0 et 16 sont des valeurs aberrantes.  
 B) DIQ=49,75; 0 est la seule valeur aberrante.  
 C) DIQ=25; il y a aucune valeur aberrante.  
 D) DIQ=57; 0 et 57 sont des valeurs aberrantes.  
 E) DIQ=15,25; 57 est la seule valeur aberrante.

La réponse est E.

*Solution :* Voici les statistiques d'ordres :

0 16 21 26 28 28 34 57

Le rang de  $q_1$  est  $(n+1)25\% = 2,25$ .

Alors,  $q_1 = 16 + 0,25(21 - 16) = 17,25$ .

Le rang de  $q_3$  est  $(n+1)75\% = 6,75$ .

Alors,  $q_3 = 28 + 0,75(34 - 28) = 32,5$ . Alors,  $DIQ = 32,5 - 17,25 = 15,25$ . Voici les clôtures :

$$\text{clôture sup.} = q_3 + 1,5IQR = 32,5 + 1,5(15,25) = 55,375.$$

$$\text{cl\^oture inf. } Q_1 - 1.5\text{IQR} = 17,25 - 1,5(15,25) = -5,625.$$

Seulement 57 est à l'extérieure des cl\^otures. Alors, 57 est la seule valeur aberrante.

11. Un chercheur déclare que plus de 10% de tous les casques de football ont des défauts de fabrication qui pourraient causer des blessure au joueur. Un échantillon de 200 casques a révélé que 24 casques contenaient de tels défauts. Est-ce que nous avons des preuves significatives en faveur de la déclaration du chercheur ? Donner la valeur  $P$  et la conclusion à  $\alpha = 5\%$ .

A) valeur  $P=0,3472$ . À  $\alpha = 5\%$ , les preuves en faveur de la déclaration du chercher sont significatives.

B) valeur  $P=0,3472$ . À  $\alpha = 5\%$ , les preuves en faveur de la déclaration du chercher ne sont pas significatives.

C) valeur  $P=0,1736$ . À  $\alpha = 5\%$ , les preuves en faveur de la déclaration du chercher ne sont pas significatives.

D) valeur  $P=0,1200$ . À  $\alpha = 5\%$ , les preuves en faveur de la déclaration du chercher sont significatives.

E) valeur  $P=0,1736$ . À  $\alpha = 5\%$ , les preuves en faveur de la déclaration du chercher sont significatives.

On veut tester  $H_0 : p = 0,1$  contre  $H_1 : p > 0,1$ , où  $p$  est la vraie proportion des casques de football ont le défaut de fabrication. La valeur observée de la statistique du test est

$$z_0 = \frac{\hat{p} - 0,1}{\sqrt{(0,1)(0,9)/n}} = \frac{(24/200) - 0,1}{\sqrt{(0,1)(0,9)/200}} = 0,94.$$

C'est une alternative à la droite, alors la valeur  $P$  est  $P(Z > 0,94) = 1 - 0,8264 = 0,1736$ . Puisque  $p > \alpha = 5\%$ , les preuves contre  $H_0$  en faveur de la déclaration du chercher ne sont pas significatives. La réponse est C.

12. La durée de vie d'une ampoule est normalement distribué avec une moyenne de 53 000 heures et un écart-type de 3 570 heures. Les ingénieurs de la circulation installer 10 lampadaires avec de nouvelles ampoules. Supposons que chacune des ampoules échoue indépendamment des autres ampoules. Quelle est la probabilité qu'au plus un des 10 ampoules échouera avant 50 000 heures de fonctionnement ?

A) 0,2125      B) 0,9437      C) 0,4563      D) 0,1877      E) 0,3743

Soit  $X$  la durée de vie d'une ampoule.  $X$  suit une loi normale avec  $\mu = 50\,000$  et  $\sigma = 3\,570$ . La probabilité qu'une ampoule échouera avant 50 000 heures est

$$P(X < 50\,000) = \Phi\left(\frac{50\,000 - 53\,000}{3\,570}\right) = \Phi(-0,84) = 0,2005.$$

Soit  $Y$  le nombre d'ampoules parmi  $n = 10$  ampoules qui vont échouer avant 50 000 heures.  $Y$  suit une loi binomiale avec  $n = 10$  et  $p = 0,2005$ .

On veut

$$P(Y \leq 1) = \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10} + \binom{10}{1} p^1 (1-p)^9 = 0,3743.$$

La réponse est E.

13. Une firme d'ingénierie a une page Facebook. Les visites sur la page se produisent selon un processus de Poisson à un taux de 4 visites par jour. Quelle est la probabilité que nous avons besoin d'attendre plus d'une journée pour observer 4 visites ?

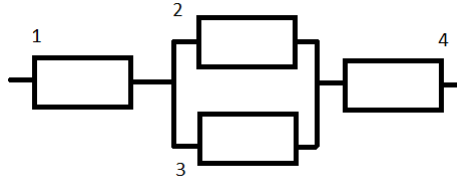
A) 0,0915      B) 0,4335      C) 0,6288      D) 0,0183      E) 0,2381

Soit  $N(1)$  le nombre de visites par jour.  $N(1)$  suit une loi Poisson de moyenne  $\lambda t = 4(1) = 4$ . On veut

$$P[N(1) \leq 3] = e^{-4} \frac{4^0}{0!} + e^{-4} \frac{4^1}{1!} + e^{-4} \frac{4^2}{2!} + e^{-4} \frac{4^3}{3!} = 0,4335.$$

La réponse est B.

14. Le circuit suivant est opérationnel seulement s'il y a un chemin de composants fonctionnels de gauche à droite. Pour chaque composant la probabilité qu'il échouera est de 0,015. Supposons qu'un composant fonctionne indépendamment des autres. Quelle est la probabilité que le circuit soit opérationnel ?



- A) 0,97      B) 0,96      C) 0,95      D) 0,93      E) 0,90

**Solution :** Soit  $A_i$  l'événement que le composant  $i$  est fonctionne pour  $i = 1, 2, 3, 4$ . On a  $P(A_i) = 1 - 0,015 = 0,985$  pour  $i = 1, 2, 3, 4$ . Les composant 2 et 3 sont assemblés en parallèle. La probabilité qu'au moins un de ces deux fonctionne est

$$P(A_2 \cup A_3) = 1 - P(A_2')P(A_3') = 1 - (0,015)^2 = 0,999775.$$

Le circuit fonctionne si et seulement si les composants 1 et 4 fonctionnent et au moins un des composants 2 et 3 fonctionne. Alors, la probabilité que le circuit fonctionne est

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap (A_2 \cup A_3) \cap A_4) &= P(A_1)P(A_2 \cup A_3)P(A_4) \\ &= (0,985)(0,999775)(0,985) = 0,9700067 \approx 0,97. \end{aligned}$$

La réponse est A.

15. Des sacs de mélange de béton sont étiquetés comme contenant 100 kg ont une moyenne de la population de 100 kg et un écart type de la population de 0,5 kg. Quelle est la probabilité que la masse moyenne d'un échantillon aléatoire de 50 sacs soit inférieure à 99,9 kg ?

- A) 0,0793      B) 0,4207      C) 0,0023      D) 0,0183      E) 0,9214

Par le théorème central limite

$$Z = \frac{\bar{X} - 100}{0,5/\sqrt{50}} \sim N(0, 1) \text{ approximativement,}$$

puisque  $n$  est grand. On veut

$$P(\bar{X} < 99,9) \approx \Phi\left(\frac{99,9 - 100}{0,5/\sqrt{50}}\right) = \Phi(-1,41) = 0,0793.$$

La réponse est A.

## Questions à réponses courtes (Total de 26 points)

*S'il vous plaît entrer vos réponses complètes dans le cahier-réponse.*

**Question 1 [7 points]** : Soit  $X$  une variable aléatoire discrète muni de la fonction masse de probabilité suivante :

$$p_X(x) = cx^2, \quad \text{pour } x = 1, 2, 3, 4.$$

- (a) Démontrer que  $c = 1/30$ .
- (b) Calculer  $P(X \geq 2)$  et  $P(X > 2)$ .
- (c) Donner la fonction de répartition  $F_X$ .
- (d) Calculer  $E[X]$  et  $V[X]$ .

Solution :

- (a) Résoudre

$$1 = \sum_{x=1}^4 p_X(x) = c(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = 30c.$$

Donc,  $c = 1/30$ .

- (b)

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 1) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$$

et

$$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{9}{30} + \frac{16}{30} = \frac{5}{6}.$$

- (c) Puisque  $P(X = 1) = \frac{1}{30}$ ,  $P(X = 2) = \frac{4}{30}$ ,  $P(X = 3) = \frac{9}{30}$ , et  $P(X = 4) = \frac{16}{30}$ , alors la fonction de répartition est

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1/30 & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 5/30 & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ 14/30 & \text{si } 3 \leq x < 4, \\ 1 & \text{si } 4 \leq x. \end{cases}$$

(d) On a

$$E(X) = \sum_{x=1}^4 x p_X(x) = 1 \times \frac{1}{30} + 2 \times \frac{4}{30} + 3 \times \frac{9}{30} + 4 \times \frac{16}{30} = \frac{10}{3} = 3,3333.$$

et

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^4 x^2 p_X(x) = 1^2 \times \frac{1}{30} + 2^2 \times \frac{4}{30} + 3^2 \times \frac{9}{30} + 4^2 \times \frac{16}{30} = \frac{59}{5}.$$

Alors,

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{59}{5} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{31}{45} = 0,6889.$$

**Question 2 [7 points]** : La luminosité du tube d'une télévision peut être évaluée en mesurant la quantité de courant nécessaire pour atteindre un niveau de luminosité particulier. Un ingénieur croit que l'on doit utiliser 300 microampères de courant pour atteindre le niveau nécessaire de luminosité. Un échantillon de taille  $n = 20$  ont été cueilli pour vérifier la déclaration de l'ingénieur.

- Formuler une hypothèse nulle et une hypothèse alternative pour vérifier la déclaration de l'ingénieur. (**Utiliser une alternative bilatéral**).
- Pour un échantillon de taille  $n = 20$ , on calcul  $\bar{x} = 319,2$  et  $s = 18,6$ . Est-ce que nous avons des preuves significatives contre  $H_0$  en faveur de  $H_1$  à  $\alpha = 5\%$ . Quelle est votre conclusion basée sur une région critique ?
- Déterminer la valeur  $P$  du test. Quelle est votre conclusion basée sur cette valeur  $P$  ?

Solution :

- $H_0 : \mu = 300$  contre  $H_1 : \mu \neq 300$ .
- La valeur observée de la statistique du test test

$$t_0 = \frac{\bar{x} - 300}{s/\sqrt{n}} = \frac{319,2 - 300}{18,6/\sqrt{20}} = 4,62.$$

**Région Critique** : Rejet de  $H_0$  si  $|t_0| > t_{0,025;19} = 2,093$ .

**Conclusion** : Puisque  $|t_0| = 4,62 > 2,093$ , alors les preuves contre  $H_0$  en faveur de  $H_1$  sont significatives.

- (c) C'est une alternative bilatérale, alors  $P = 2P(T > 4,62)$ , où  $T$  suit une loi  $T(19)$ .

Puisque  $t_{0,001;19} < 4,62$ , alors  $P(T > 4,62) < 0,001$ . Donc,  $P < 2(0,001) = 0,002$ .

**Conclusion :** Puisque  $P < \alpha = 5\%$ , alors les preuves contre  $H_0$  en faveur de  $H_1$  sont significatives.

**Question 3 [4 points] :** Un chimiste étalonne un spectrophotomètre qui sera utilisée pour mesurer la concentration de monoxyde de carbone (CO) dans des échantillons atmosphériques. Pour vérifier l'étalonnage, des échantillons de concentration connue sont mesurés. Les vraies concentrations ( $x$ ) (en ppm) et les concentrations mesurées ( $y$ ) (en ppm) sont donnés dans le tableau suivant. En raison de l'erreur aléatoire, des mesures répétées sur le même échantillon varieront. L'appareil est considéré comme bien calibré si la concentration mesurée moyenne est égale à la concentration réelle.

$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$x_i y_i$
1	0	1	0	1	0
2	10	11	100	121	110
3	20	21	400	441	420
4	30	28	900	784	840
5	40	37	1600	1369	1480
6	50	48	2500	2304	2400
7	60	56	3600	3136	3360
8	70	68	4900	4624	4760
9	80	75	6400	5625	6000
10	90	86	8100	7396	7740
11	100	96	10000	9216	9600
total	550	527	38500	35017	36710

- (a) Trouvez la droite des moindres carrés pour exprimer la concentration mesurée  $y$  comme une fonction linéaire de la concentration réelle  $x$ .
- (b) Utiliser la droite des moindres carrés pour estimer la concentration mesurée moyenne pour une concentration réelle de 20 ppm. Est-ce que l'appareil semble être bien calibré pour des concentrations d'environ 20 ppm ? (Discuter.)

(a) Considérons les formes quadratiques suivantes :

$$s_{xy} = \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)/n = 36710 - (550)(527)/11 = 10360$$

and

$$s_{xx} = \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2/n = 38500 - (550)^2/11 = 11000.$$

La pente de la droite des moindres carrés est

$$\hat{\beta}_1 = \frac{s_{xy}}{s_{xx}} = \frac{10360}{11000} = 0,94182.$$

L'ordonnée à l'origine est

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = \frac{527}{11} - (0,94182) \left( \frac{550}{11} \right) = 0,81809.$$

Donc, la droite des moindres carrés est  $\hat{y} = 0,81809 + 0,94182 x$ .

- (b) L'estimation de la moyenne de la concentration mesurée pour une concentration réelle de 20 ppm est  $\hat{y} = 0,81809 + 0,94182 (20) = 19,6545$ . Etant donné que l'estimation de la moyenne de la concentration mesurée est proche de 20 ppm, il semble que l'appareil semble être bien calibré pour des concentrations d'environ 20 ppm.