Test 2 – Solutions Total: 28

d'étudiant ____________________ MAT 1702B Test 2, le 2 mars 2011

Partie 1: Questions à choix multiples: Choisissez une seule réponse. Aucun point partiel n'est accordé.

1. [**2 points**] Pour quelles valeurs de h les vecteurs suivants sont linéairement indépendants?

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Pour toutes les valeurs de h,

(b) $h \neq 1$,

(c) $h \neq 0$,

(d) $h = 0$.

Réponse: $\boxed{C}$

2. [**2 points**] On considère $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Calculez $AI_2(2B^T) + B$.

(a) $\begin{bmatrix} 18 & 5 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$,

(b) $\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$,

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$,

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Réponse: $\boxed{A}$

3. **[2 points]** Supposons que A est une matrice $n \times n$ inversible. Laquelle des propositions suivantes est **fausse**?

(a) A^{-1} est inversible,

(b) $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ est compatible,

(c) Si B est inversible alors AB est toujours inversible,

(d) Il existe un vecteur $\overrightarrow{b}$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ ne soit pas compatible.

(e) A^T est inversible.

Réponse: $\boxed{D}$

4. **[2 points]** Supposons que $A = PB$, où $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ et $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
La première ligne de B est:

(a) $[\ 5 \quad 8\ ]$,

(b) $[\ 5 \quad -3\ ]$,

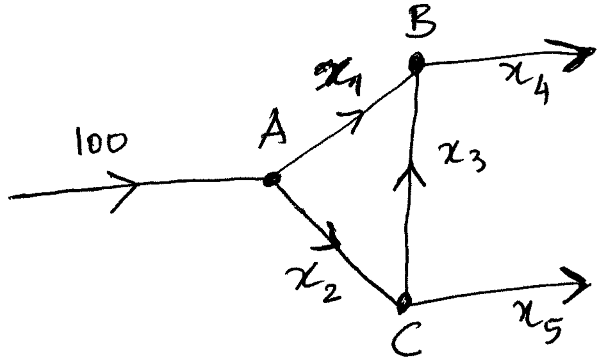
(c) $[\ -1 \quad 3\ ]$,

(d) $[\ 1 \quad -2\ ]$,

Réponse: $\boxed{C}$

Partie 2: Questions à réponses longues: Les détails sont nécessaires.

5. **[8 points]** On considère les réseau routier suivant avec des rues à sens unique:



3pts. (a) Écrire le système linéaire associé à ce réseau de trafic. (Ne pas résoudre le système.)

A: $100 = x_1 + x_2$

B: $x_1 + x_3 = x_4$

C: $x_2 = x_3 + x_5$

Réseau total: $100 = x_4 + x_5$

On obtient le système:

$$\begin{aligned} x_4 + x_5 &= 100 \\ x_1 + x_2 &= 100 \\ x_1 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 - x_5 &= 0. \end{aligned}$$

3pts (b) Supposons que la forme réduite de matrice augmentée du système de la question (a) est:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Trouvez la solutions générale du système

x_3 et x_5 sont des variables libres.
x_1, x_2 et x_4 sont des variables de base.
La solution générale est:

$$x_1 = 100 - x_3 - x_5$$
$$x_2 = x_3 + x_5$$
$$x_4 = 100 - x_5$$
x_3, x_5 libres.

2pts (c) Si on ferme la rue associée à x_5, trouvez la valeur maximale de x_1.

Si on ferme la rue associée à x_5, on a $x_5 = 0$ et donc $x_1 = 100 - x_3 \leq 100$.
Le maximum pour x_1 est $\boxed{100}$

6. [6 points] Une économie fermée est formée de deux secteurs qui sont les transports et les telecommunications. On suppose que la matrice des coefficients techniques de cette économie est:

$$C = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,7 & 0,3 \end{bmatrix},$$

où la 1ere colonne et la 1ere ligne correspondent aux transports et la 2eme colonne et la 2eme ligne correspondent aux telecommunications.

2pts (a) Donnez l'équation de production de cette économie (le modèle input-output de Leontief).

$$\underbrace{\vec{x}}_{\text{Quantité produite}} = \underbrace{C\vec{x}}_{\text{Demande intermédiaire}} + \underbrace{\vec{d}}_{\text{Demande finale}}$$

avec $C = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,7 & 0,3 \end{bmatrix}$

Ou bien: $(I-C)\vec{x} = \vec{d}$

4 pts (b) Déterminez le niveau de production que nécessite une demande finale de $d = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$

On doit résoudre le système $(I-C)\vec{x} = \vec{d}$

avec $I - C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,7 & 0,3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 \\ -0,7 & 0,7 \end{bmatrix}$

et $\vec{d} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$

On calcule l'inverse $(I-C)^{-1}$: $\det(I-C) = 0,56 - 0,42 = 0,14$.

$$(I-C)^{-1} = \frac{1}{0,14}\begin{bmatrix} 0,7 & 0,6 \\ 0,7 & 0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & \frac{0,6}{0,14} \\ 5 & \frac{0,8}{0,14} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = (I-C)^{-1}\vec{d} = \begin{bmatrix} 5 & 0,6/0,14 \\ 5 & 0,8/0,14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 228,57 \\ 271,43 \end{bmatrix}.$$

7. **[6 points]** On considère la matrice suivante

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 11 & 2 \end{bmatrix}.$$

4 pts (a) Trouver l'inverse de la matrice A.

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 11 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{-3L_1+L_3 \to L_3}{\overset{-2L_1+L_2 \to L_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{-5L_2+L_3 \to L_3}{\overset{-2L_2+L_1 \to L_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \end{bmatrix} \underset{-L_3 \to L_3}{\overset{L_3+L_1 \to L_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 12 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Ainsi A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 12 & -7 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

2 pts (b) Utiliser A^{-1} pour résoudre $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\vec{x} = A^{-1}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -7 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 \\ -6 \\ -22 \end{bmatrix}$$