

Université d'Ottawa  
Département de Mathématiques et de Statistique

MAT 1702B: Méthodes mathématiques II  
Professeur : Abdellah Sebbar

Test 1 – le 1er février 2013

Nom \_\_\_\_\_ Prénom \_\_\_\_\_

# d'étudiant \_\_\_\_\_

**Instructions :**

- (1) L'examen est d'une durée de 80 minutes.
- (2) Le nombre de points pour chaque question est indiqué entre les parenthèses carrées.
- (3) Vous devez tout justifier.
- (4) Veuillez utiliser l'espace désigné pour écrire vos réponses. Vous pouvez utiliser le verso de chaque feuille comme papier brouillon. Par contre, ces brouillons ne seront pas considérés lors de la correction.
- (5) Ecrivez votre numéro d'étudiant au haut de chaque feuille.
- (6) Aucune note de cours, aucune calculatrice ni papier brouillon n'est permit.
- (7) Bonne chance !

Ne pas écrire dans le tableau suivant.

Question	1	2	3	4	5	6	Total
Maximum	3	2	5	5	4	6	25
Note							

1. Calculez

(a) [1 point] 
$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

**Solution:** 
$$\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 18 \end{bmatrix}$$

(b) [2 points] 
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

**Solution:** 
$$3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

2. [2 points] Lesquelles des propositions suivantes sont vraies? A noter que plus d'une proposition peut être vraie. Vous devez indiquer **toutes** les propositions vraies.

- (a) Un système homogène peut être incompatible.
- (b) Un système linéaire est compatible si et seulement si sa matrice des coefficients et sa matrice augmentée ont le même nombre de positions pivots.
- (c) Chaque matrice est équivalente à exactement une seule matrice échelonnée réduite.
- (d) Chaque système linéaire avec 5 équations et 5 inconnues admet une solution unique.
- (e) Tout ensemble engendré par deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  est un plan.

**Réponse:** \_\_\_\_\_

# d'étudiant \_\_\_\_\_

MAT 1702B Test 1, le 1er février 2013

**Solution:** (b), (c)

3. [5 pts] Trouver toutes les solutions du système linéaire suivant:

$$\begin{aligned} -x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= -3 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$$

**Solution:** On doit réduire la matrice augmentée:

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & -2 & -3 \\ 2 & 7 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-2L_1+L_3 \\ -L_1+L_3}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{-L_2+L_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-3L_3+L_2 \\ 2L_3+L_1}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{-L_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-4L_2+L_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Ainsi, il y a une solution unique donnée par:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 2.$$

4. [5 pts] Pour quelles valeurs de  $h$  et  $k$  le système linéaire suivant

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= h \\ -x_1 + kx_2 &= 1 \end{aligned}$$

- (a) n'admet aucune solution
- (b) admet une solution unique
- (c) admet une infinité de solutions

**Solution:** On réduit la matrice augmentée:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 2 & h \\ -1 & k & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}L_1+L_2} \left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 2 & h \\ 0 & k+1 & 1 + \frac{1}{2}h \end{array} \right]$$

- (a) Le système n'a pas de solution si  $k = -1$  et  $h \neq -2$ .
- (b) Le système admet une solution unique si  $k \neq -1$ .
- (c) Le système admet une infinité de solutions si  $k = -1$  et  $h = -2$ .

5. [4 pts]

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & -8 \end{bmatrix} \text{ et } \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Pour quelles valeurs possibles de  $b_1$ ,  $b_2$  et  $b_3$  le système  $A\vec{x} = \vec{b}$  est-il compatible?

**Solution:** On réduit la matrice augmentée en forme échelonnée

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & b_1 \\ -3 & 2 & 6 & b_2 \\ 5 & -1 & -8 & b_3 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{L_1+L_2 \\ -5L_1+L_3}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & b_1 \\ 0 & -7 & -6 & 3b_1 + b_2 \\ 0 & 14 & 12 & -5b_1 + b_3 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{2L_2+L_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & b_1 \\ 0 & -7 & -6 & 3b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 + 2b_2 + b_3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Le système est compatible si on n'a pas de pivot à la dernière colonne. C'est à dire, on doit avoir

$$b_1 + 2b_2 + b_3 = 0$$

6. [6 pts] Soit  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & -8 \\ -3 & -7 & 9 \end{bmatrix}$ .

- (a) Trouver les solutions du système homogène  $A\vec{x} = \vec{0}$  sous forme paramétrique. Quelle est l'interprétation géométrique de l'ensemble des solutions?

**Solution:** On réduit la matrice augmentée en forme échelonnée réduite

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & -8 & 0 \\ -3 & -7 & 9 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-L_1+L_2 \\ 3L_1+L_3}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{-2L_2+L_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-3L_2+L_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$x_1$  et  $x_2$  sont des variables de base et  $x_3$  est une variable libre. Le système correspondant est:

$$\begin{aligned} x_1 & + 4x_3 = 0 \\ x_2 & - 3x_3 = 0 \\ x_3 & \text{ est libre} \end{aligned}$$

On obtient alors:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_3 \\ 3x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En forme paramétrique:

$$\vec{x} = s \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

C'est une droite dirigée par le vecteur  $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

(b) Supposons que  $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$  et que

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

est une solution particulière de l'équation matricielle  $A\vec{x} = \vec{b}$ . Trouver la solution générale de l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  sous forme paramétrique. (Noter que la matrice  $A$  est la même que dans la partie (a).

**Solution:** On doit ajouter la solution particulière à la solution du système homogène de la question (a). Ainsi, la solution générale est

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

# d'étudiant \_\_\_\_\_

MAT 1702B Test 1, le 1er février 2013

Cette page est dédiée à vos brouillons.