Université d'Ottawa · University of Ottawa

Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique

Faculty of Science
Mathematics and Statistics

MAT 1722 C – Test #2B

Professeur : Guy Beaulieu

26 novembre, 2015

Nom :__________________________________ Prénom :__________________________

d'étudiant :______________________

Il est interdit de se servir de téléphones cellulaires, de dispositifs électroniques non autorisés ou de notes de cours (à moins qu'il s'agisse d'un examen à livre ouvert). Les téléphones et les dispositifs doivent être fermés et rangés dans votre sac : vous ne pouvez pas les laisser dans vos poches ou sur votre personne. Sinon, on pourrait vous demander de quitter l'examen immédiatement et des allégations de fraude scolaire pourraient être déposées dont le résultat pourrait être un 0 (zéro) pour l'examen.

En apposant votre signature, vous reconnaissez vous être assuré de respecter l'énoncé ci-dessus.

Signature : ____

Prenez le temps de lire tout le document avant de commencer et lisez chaque question attentivement. N'oubliez pas que certaines questions vallent plus de point que d'autre. Notez les questions que vous vous sentez confiant de répondre et répondez à ceux-ci en premier : vous ne devez pas répondre les questions dans l'ordre qu'ils sont écrite.

- La durée de cet examen est **80 minutes**.
- Cet examen comprends 7 questions pour un total de 25 points. La bonne réponse nécessite une justification écrite lisiblement et logiquement; vous devez me convaincre que vous savez pourquoi votre solution est la bonne. Dessinez des boites autours de vos réponses finales.
- Utilisez l'espace spécifié pour répondre à chacune des questions. Si jamais l'espace ne vous suffit pas ou que vous utilisez l'endos de la page, veuillez l'indiquer clairement où se trouve votre réponse ainsi que la suite du développement, s'il y a lieu.
- Cet examen est à livre fermé et vos notes de cours ne seront pas allouées. L'utilisation de téléphone cellulaire, pagette ou tout autre appareil qui peut transmettre ou stocker de l'information **ne sont pas permis.**
- Seules les calculatrices approvées par la Faculté des Sciences (TI-30X, TI-34X, Casio FX-260X et Casio FX-300X) seront permises .

Bonne Chance!

585, av. King-Edward C.P. 450, Succ. A
Ottawa (Ontario) K1N 6N5 Canada

585 King Edward Ave., P.O. Box 450, Stn. A
Ottawa, Ontario K1N 6N5 Canada

(613) 562-5864 • Téléc./Fax (613) 562-5776
Courriel/Email: uomaths@science.uottawa.ca

d'étudiant :____________________, Note finale : ___________ sur 25

Problème	1	2	3	4	5	6	7
Notes							

Question 1. [5 points] Résoudre le problème à valeur initiale suivant :

$$\frac{dy}{dx} = 3e^{3x-y}, \qquad y(0) = \ln(4).$$

Solution.
L'équation différentielle à résoudre se réécrit

$$\frac{dy}{dx} = 3e^{3x-y} = \frac{3e^{3x}}{e^y},$$

donc on peut utiliser la méthode de séparation des variables. On trouve

$$\int e^y\,dy = \int 3e^{3x}\,dx$$

donc $e^y = e^{3x} + C$ pour une constante C, puis

$$y = \ln(e^{3x} + C).$$

Enfin, comme $y(0) = \ln(4)$, on trouve

$$\ln(4) = \ln(1 + C),$$

donc $4 = 1 + C$, puis $C = 3$. La solution est

$$y = \ln(e^{3x} + 3).$$

Question 2. [1 point] Une citerne contient 400 litres d'eau avec 10 kg de sel dissout. De la saumure qui contient 0.01 kg/L de sel y est introduite à raison de 4 L/min. La solution est constamment brassée et évacuée au taux de 4 L/min, de sorte que le volume demeure constant. Si $Q(t)$ désigne la quantité de sel dissous (en kg) dans la citerne au temps t (en minutes), quelle est l'équation différentielle que satisfait Q ?

Solution. On sait que

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= (\text{taux de sel entrant}) - (\text{taux de sel sortant}) \\ &= (4(0.01)) - 4\left(\frac{Q(t)}{400}\right)\end{aligned}$$

Donc l'équation différentielle pour Q est

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{4 - Q(t)}{100}$$

Question 3. [2 points] La série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+4}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)$$

est une série télescopique. Calculez sa somme et donnez la valeur exacte.

Solution. On trouve que la somme partielle des k premiers termes de la série est

$$\begin{aligned}
s_k &= \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{\sqrt{n+4}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{n+4}}-\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{n+2}}\\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k+2}}+\frac{1}{\sqrt{k+3}}+\frac{1}{\sqrt{k+4}}\right)\\
&\qquad -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k+2}}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{k+3}}+\frac{1}{\sqrt{k+4}}-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}
\end{aligned}$$

La somme de la série est donc

$$\begin{aligned}
s &= \lim_{k\to\infty} s_k\\
&= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k+3}}+\frac{1}{\sqrt{k+4}}-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\\
&= 0-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}
\end{aligned}$$

Question 4. [4 points] Le test de l'intégrale permet de majorer l'erreur d'approximation de la série

$$s = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^6}$$

par la somme partielle

$$s_{40} = \sum_{n=3}^{40} \frac{1}{n(\ln n)^6}.$$

Quelle majoration de lerreur $s - s_{40}$ fournit-il ?

Solution. Selon le test de l'intégrale, l'erreur $R_{40} = s - s_{40}$ satisfait

$$0 \leq R_{40} \leq \int_{40}^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^6}\, dx$$

pourvu que la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^6}$$

soit décroissante à valeurs positives pour $x > 40$, ce qui est bien le cas.

En posant $u = \ln x$, on a $du = \frac{dx}{x}$, et on obtient

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^6}\, dx = \int \frac{1}{u^6}\, du = \frac{-1}{5u^5} + C = \frac{-1}{5(\ln x)^5} + C$$

donc,

$$\begin{aligned}
\int_{40}^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^6}\, dx &= \lim_{t\to\infty} \int_{40}^{t} \frac{1}{x(\ln x)^6}\, dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{-1}{5(\ln t)^5} + \frac{1}{5(\ln(40))^5} \right) \\
&= \frac{1}{5(\ln(20))^5} \\
&\approx 0.000292791
\end{aligned}$$

Ainsi, on a $R_{40} \leq 0.000292791$.

Question 5. [6 points]
a) [4 points] Déterminer si la série suivante est absolument convergente, semi-convergente ou divergente.

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-4}$$

b) [2 points] Quelle est, en valeur absolue, l'erreur maximale d'approximation de la série alternée

$$s = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^6}$$

par la somme partielle

$$s_5 = \sum_{n=2}^{5} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^6} \quad ?$$

Solution.

(a) On considère la série en valeur absolue. Puisque

$$\sum_{n=5}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n-4} \right| = \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n-4} \geq \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n}$$

et que $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge car c'est la série harmonique. Nous avons que

$$\sum_{n=5}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n-4} \right|$$

diverge par le test de comparaison.

Par contre, nous avons que $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-4}$ est une série alternée tel que $b_n = \frac{1}{n-4}$ est positif et décroissante, puisque $\frac{1}{n-3} < \frac{1}{n-4}$, pour $n \geq 5$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Ainsi, elle converge par le test des séries alternées.

Donc, la série est semi-convergente.

(b) La valeur absolue du terme général de cette série est

$$b_n = \frac{1}{n(\ln n)^6}$$

qui est une fonction décroissante de n, pour $n \geq 2$.

Alors, le critère des séries alternées nous apprend que l'erreur d'approximation $R_5 = s - s_5$ satisfait

$$R_5 \leq b_6 = \frac{1}{6(\ln(6))^6} \approx 0.005036983.$$

Question 6. [6 points] Déterminer le rayon et l'intervalle de convergence de la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+2)4^n}$$

Solution.
Le terme général de cette série est

$$a_n = \frac{(x-2)^n}{(n+2)4^n}.$$

On trouve

$$\begin{aligned}
\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{|x-2|^{n+2}}{(n+3)4^{n+1}} \cdot \frac{(n+2)4^n}{|x-2|^n} \\
&= \frac{|x-2|}{4} \cdot \frac{n+2}{n+3} \\
&= \frac{|x-2|}{4} \cdot \frac{1+2/n}{1+3/n} \\
&\to \frac{|x-2|}{4}
\end{aligned}$$

lorsque $n \to \infty$. Le rayon de convergence de cette srie est donc $R = 4$.

Ainsi. puisque la série est centré en $x = 2$, l'intervalle de convergence inclu $]-2, 6[$. Il faut maintenant y vérifier les bornes.

Pour $x = -2$, la série est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$$

qui est une série alternée avec $b_n = \frac{1}{n+2}$ qui est décroissant, positif et $\lim_{n \to b_n} = 0$. Donc, convergente.

Pour $x = 6$, la série est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2},$$

on choisie $a_n = \frac{1}{n+2}$ et $b_n = \frac{1}{n}$ et puisque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/(n+2)} = 1$$

La série est divergente par le test de comparaison version limite.

Ainsi l'intervalle de convergence est $[-2, 6[$.

Question 7. [1 point] Une fonction $f(x)$ satisfait

$$f(3) = -1, \qquad f(3) = 2, \qquad f(3) = -1, \qquad f(3) = 1, \qquad \ldots$$

Quel est le coefficient c_3 dans le développement en série de Taylor de $f(x)$

$$c_0 + c_1(x-3) + c_2(x-3)^2 + c_3(x-3)^3 + \ldots \qquad ?$$

Solution. Cest

$$\frac{f^{(3)}(3)}{3!} = \frac{1}{3!} = 1/6.$$

Page supplémentaire pour brouillon

Page supplémentaire pour brouillon