



Université d'Ottawa • University of Ottawa

Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique

Faculty of Science
Mathematics and Statistics

MAT 1722 C – Test #1B

Professeur : Guy Beaulieu

15 octobre, 2015

Nom : _____ Prénom : _____

d'étudiant : _____

Il est interdit de se servir de téléphones cellulaires, de dispositifs électroniques non autorisés ou de notes de cours (à moins qu'il s'agisse d'un examen à livre ouvert). Les téléphones et les dispositifs doivent être fermés et rangés dans votre sac : vous ne pouvez pas les laisser dans vos poches ou sur votre personne. Sinon, on pourrait vous demander de quitter l'examen immédiatement et des allégations de fraude scolaire pourraient être déposées dont le résultat pourrait être un 0 (zéro) pour l'examen.

En apposant votre signature, vous reconnaissez vous être assuré de respecter l'énoncé ci-dessus.

Signature : _____

Prenez le temps de lire tout le document avant de commencer et lisez chaque question attentivement. N'oubliez pas que certaines questions valent plus de point que d'autre. Notez les questions que vous vous sentez confiant de répondre et répondez à ceux-ci en premier : vous ne devez pas répondre les questions dans l'ordre qu'ils sont écrites.

- La durée de cet examen est **80 minutes**.
- Cet examen comprends 7 questions pour un total de 25 points. La bonne réponse nécessite une justification écrite lisiblement et logiquement; vous devez me convaincre que vous savez pourquoi votre solution est la bonne. Dessinez des boites autour de vos réponses finales.
- Utilisez l'espace spécifié pour répondre à chacune des questions. Si jamais l'espace ne vous suffit pas ou que vous utilisez l'endos de la page, veuillez l'indiquer clairement où se trouve votre réponse ainsi que la suite du développement, s'il y a lieu.
- Cet examen est à livre fermé et vos notes de cours ne seront pas allouées. L'utilisation de téléphone cellulaire, pagette ou tout autre appareil qui peut transmettre ou stocker de l'information **ne sont pas permis**.
- Seules les calculatrices approuvées par la Faculté des Sciences (TI-30X, TI-34X, Casio FX-260X et Casio FX-300X) seront permises .

Bonne Chance!

585, av. King-Edward C.P. 450, Succ. A
Ottawa (Ontario) K1N 6N5 Canada

585 King Edward Ave., P.O. Box 450, Stn. A
Ottawa, Ontario K1N 6N5 Canada

(613) 562-5864 • Téléc./Fax (613) 562-5776
Courriel/Email: uomaths@science.uottawa.ca

d'étudiant : _____, Note finale : _____ sur 25

Problème	1	2	3	4	5	6	7
Notes							

Question 1. [5 points] Étudier la convergence de l'intégrale ci-dessous et, si l'intégrale est convergente, donner sa valeur.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x}{(2x^2 + 3)^2} dx$$

Solution.

On a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x}{(2x^2 + 3)^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{4x}{(2x^2 + 3)^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{4x}{(2x^2 + 3)^2} dx$$

pourvu que chacune des intégrales de droite soient convergentes.

On pose $u = 2x^2 + 3$. Alors $du = 4x dx$ et on trouve

$$\begin{aligned} \int \frac{4x}{(2x^2 + 3)^2} dx &= \int u^{-2} du \\ &= \left(\frac{u^{-2+1}}{1-2} \right) + C \\ &= \frac{-1}{(2x^2 + 3)} + C. \end{aligned}$$

Par suite, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{4x}{(2x^2 + 3)^2} dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{4x}{(2x^2 + 3)^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\frac{-1}{(2x^2 + 3)} \right]_t^0 \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1}{3} - \frac{-1}{(2t^2 + 3)} \right) \\ &= -1/3. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{4x}{(2x^2 + 3)^2} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{4x}{(2x^2 + 3)^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{(2x^2 + 3)} \right]_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{(2t + 3)} - \frac{-1}{3} \right) \\ &= 1/3.\end{aligned}$$

Donc, l'intégrale est convergente et

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(2x + 3)^2} dx = (-1/3) + (1/3) = 0.$$

Question 2. [2 points] On veut utiliser un test de comparaison pour déterminer si

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(x + e^{2x})^{1/3}} dx$$

est convergente ou non. Choisir le bon argument.

(A) L'intégrale est convergente car $\frac{1}{(x + e^{2x})^{1/3}} \leq \frac{1}{x^{1/3}}$ pour tout $x \geq 1$ et

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1/3}} dx = \frac{1}{1/3 - 1} < \infty.$$

(B) L'intégrale est convergente car $\frac{1}{(x + e^{2x})^{1/3}} \leq \frac{1}{(e^{2x})^{1/3}} = \frac{1}{e^{(2/3)x}}$ pour tout $x \geq 1$ et

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{e^{(2/3)x}} = \frac{1}{(2/3)e^{2/3}} < \infty.$$

(C) L'intégrale est divergente car $\frac{1}{(x + e^{2x})^{1/3}} \geq \frac{1}{x^{1/3}}$ pour tout $x \geq 1$ et

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1/3}} dx = \infty.$$

(D) L'intégrale est divergente car $\frac{1}{(x + e^{2x})^{1/3}} \geq \frac{1}{(e^{2x})^{1/3}} = \frac{1}{e^{(2/3)x}}$ pour tout $x \geq 1$ et

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{e^{(2/3)x}} = \infty.$$

(E) L'intégrale est convergente car $\frac{1}{(x + e^{2x})^{1/3}} \leq \frac{1}{(1/3)e^{2x}}$ pour tout $x \geq 1$ et

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(1/3)e^{2x}} dx = \frac{1}{(2/3)e^2} < \infty.$$

(F) L'intégrale est divergente car $\frac{1}{(x + e^{2x})^{1/3}} \geq \frac{1}{(1/3)x}$ pour tout $x \geq 1$ et

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(1/3)x} dx = \infty.$$

Solution. (B) L'intégrale est convergente car $\frac{1}{(x + e^{2x})^{1/3}} \leq \frac{1}{(e^{2x})^{1/3}} = \frac{1}{e^{(2/3)x}}$ pour tout $x \geq 1$ et

$$\int_1^\infty \frac{dx}{e^{(2/3)x}} = \frac{1}{(2/3)e^{2/3}} < \infty.$$

Comment : La somme $x + e^{2x}$ se comporte comme e^{2x} lorsque $x \rightarrow \infty$, car e^{2x} tend vers l'infini plus rapidement que n'importe quelle puissance de x . Pour tout $x \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} x + e^{2x} &\geq e^{2x} \\ \Rightarrow (x + e^{2x})^{1/3} &\geq (e^{2x})^{1/3} = e^{(2/3)x} \\ \Rightarrow \frac{1}{(x + e^{2x})^{1/3}} &\leq \frac{1}{e^{(2/3)x}}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{(x + e^{2x})^{1/3}} dx &\leq \int_1^\infty \frac{1}{e^{(2/3)x}} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{e^{(2/3)x}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-(2/3)x}}{2/3} \right]_1^t \\ &= \frac{-1}{2/3} \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-(2/3)t} - e^{-2/3}) \\ &= \frac{1}{(2/3)e^{2/3}} < \infty \end{aligned}$$

Question 3. [5 points] On considère les courbes $y = 7x^2 + 4x$ et $y = -x^2 + 4$. Déterminer l'aire de la région bornée du plan délimitée par ces deux courbes.

Solution.

Les coordonnées (x, y) des points d'intersection des deux courbes sont les solutions du système $y = 7x^2 + 4x$ et $y = -x^2 + 4$.

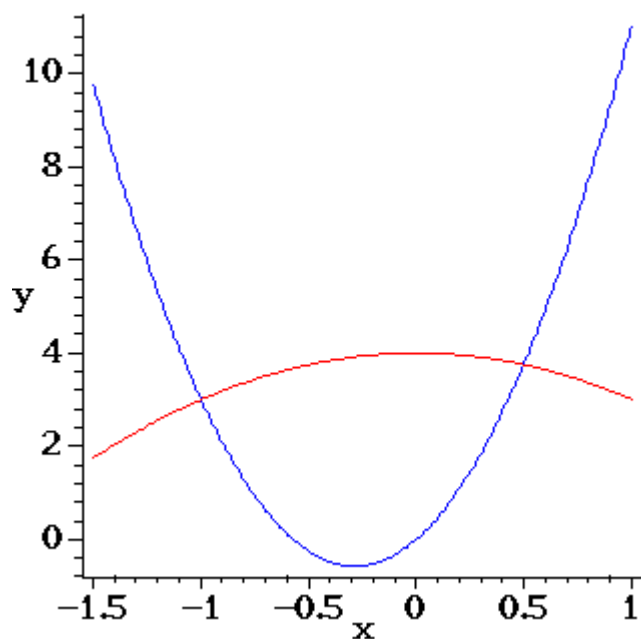
Leurs abscisses x satisfont

$$7x^2 + 4x = -x^2 + 4 \Rightarrow 8x^2 + 4x - 4 = 0,$$

donc x est $x_1 = -1$ ou $x_2 = 1/2$.

Par suite, les points en question sont $(-1, 3)$ et $(1/2, 15/4)$.

Le graphe ci-dessous représente la portion des deux courbes qui nous intéresse avec, en bleu, la parabole ouverte vers le haut d'équation $y = 7x^2 + 4x$ et, en rouge, celle ouverte vers le bas d'équation $y = -x^2 + 4$.



Donc la région bornée du plan que délimitent ces courbes est décrite par les inégalités

$$-1 \leq x \leq 1/2 \quad \text{et} \quad 7x^2 + 4x \leq y \leq -x^2 + 4.$$

On la décompose en bandes verticales minces d'épaisseur Δx qu'on assimile à des rectangles. À l'abscisse x , (pour x variant de -1 à $1/2$) la hauteur d'un rectangle est

$$(-x^2 + 4) - (7x^2 + 4x)$$

donc l'aire de cette région est :

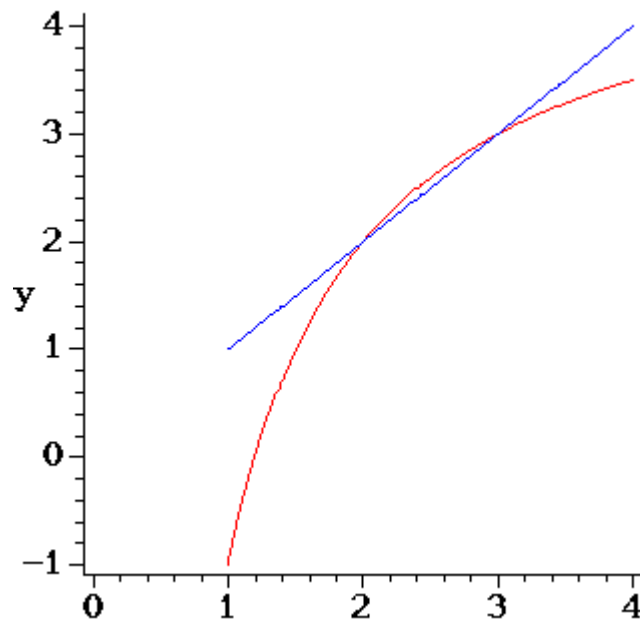
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1/2} ((-x^2 + 4) - (7x^2 + 4x)) dx &= \int_{-1}^{1/2} (-8x^2 - 4x + 4) dx \\ &= \left[-\frac{8}{3}x^3 - \frac{4}{2}x^2 + 4x \right]_{-1}^{1/2} \\ &= 9/2\end{aligned}$$

Question 4. [5 points] Soit S le solide de révolution obtenu par rotation autour de l'axe des y de la région R du plan xy bordée par les courbes $y = 5 - \frac{6}{x}$ et $y = x$. Calculer le volume de S.

Solution. L'hyperbole $y = 5 - (6/x)$ et la droite $y = x$ se coupent aux points de coordonnées (x, y) qui satisfont les deux équations. Pour ces points, on a

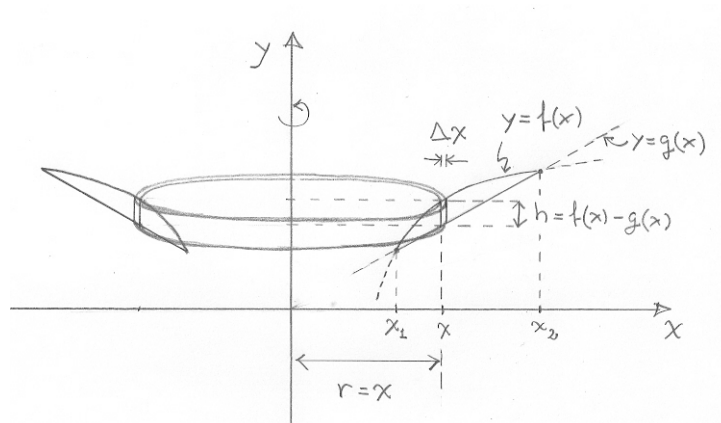
$$5 - \frac{6}{x} = x \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = 3.$$

Par suite, la région est décrite par les inégalités $2 \leq x \leq 3$ et $x \leq y \leq 5 - \frac{6}{x}$.



Le graphique ci-dessus montre cette région avec, en rouge, l'hyperbole d'équation $y = 5 - (6/x)$ et, en bleu, la droite d'équation $y = x$.

Nous allons utiliser la méthode des cylindres. La figure ci-dessous montre la région R et le cylindre en question :



Sur la figure, on doit lire $f(x) = 5 - (6/x)$ et $g(x) = x$. On a donc $r = x, h = f(x) - g(x) = 5 - \frac{6}{x} - x$.

Quant à la fonction $A(x)$, elle représente l'aire du cylindre, donc

$$\begin{aligned} A(x) &= 2\pi r h \\ &= 2\pi x \left(5 - \frac{6}{x} - x \right) \\ &= 2\pi (5x - 6 - x^2). \end{aligned}$$

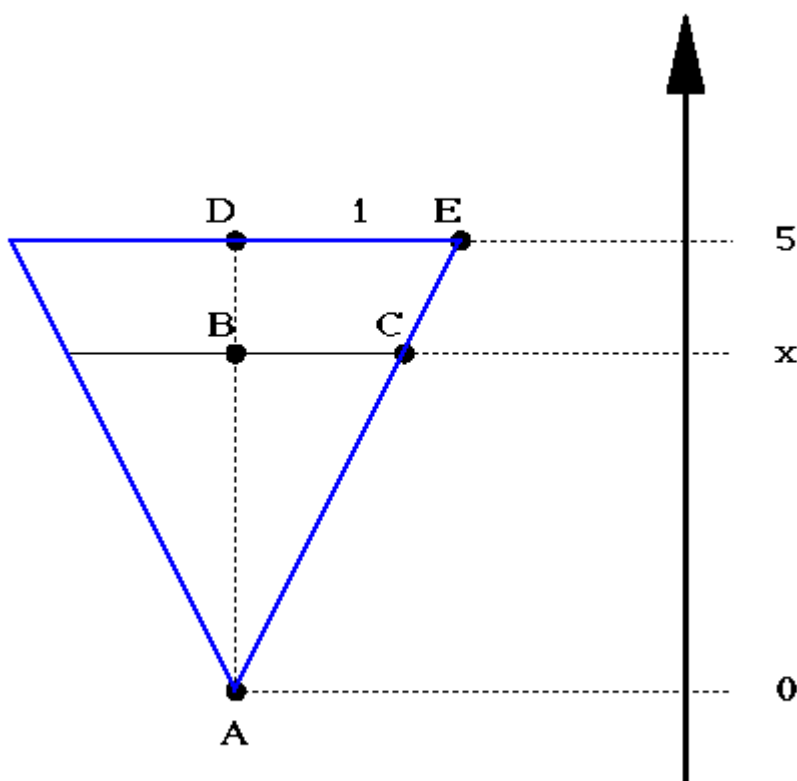
Comme la région R est comprise entre $x = 2$ et $x = 3$, le volume en question est

$$\begin{aligned} \int_2^3 A(x) dx &= 2\pi \int_2^3 (5x - 6 - x^2) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{5x^2}{2} - 6x - \frac{x^3}{3} \right]_2^3 \\ &\approx 1.047. \end{aligned}$$

Question 5. [5 points] Un réservoir a la forme d'une pyramide à base carrée avec la pointe en bas. Sa hauteur est de 5 m, son côté à la base est de 2 m et il est rempli d'eau jusqu'à 3 m. Déterminez, en Joules, le travail requis pour pomper toute l'eau au sommet du réservoir. (Notez que 1 m^3 d'eau pèse approximativement 9800 N)

Solution.

La figure ci-dessous montre une coupe verticale du réservoir par un plan vertical passant par sa pointe et parallèle à un côté de la base.



La section horizontale de ce réservoir à la hauteur x est un carré de côté $2|BC|$. Par hypothèse, à la hauteur $|AD| = 5$ on a $|DE| = 2/2$. Comme les triangles $\triangle ABC$ et $\triangle ADE$ sont semblables, on en déduit que le côté du carré à la hauteur x est

$$2|BC| = 2|AB||AD||DE| = \frac{x}{5}2.$$

Donc, la couche en question s'assimile à un parallélépipède rectangle plat de hauteur Δx , dont la base est un carré de côté $2x/5$. Son volume est environ $(2x/5)^2 \Delta x$. Comme 1 m^3

d'eau pèse ≈ 9800 N, le poids de cette couche est

$$9800(2x/5)^2 \Delta x = 1,568x^2 \Delta x = P(x) \Delta x$$

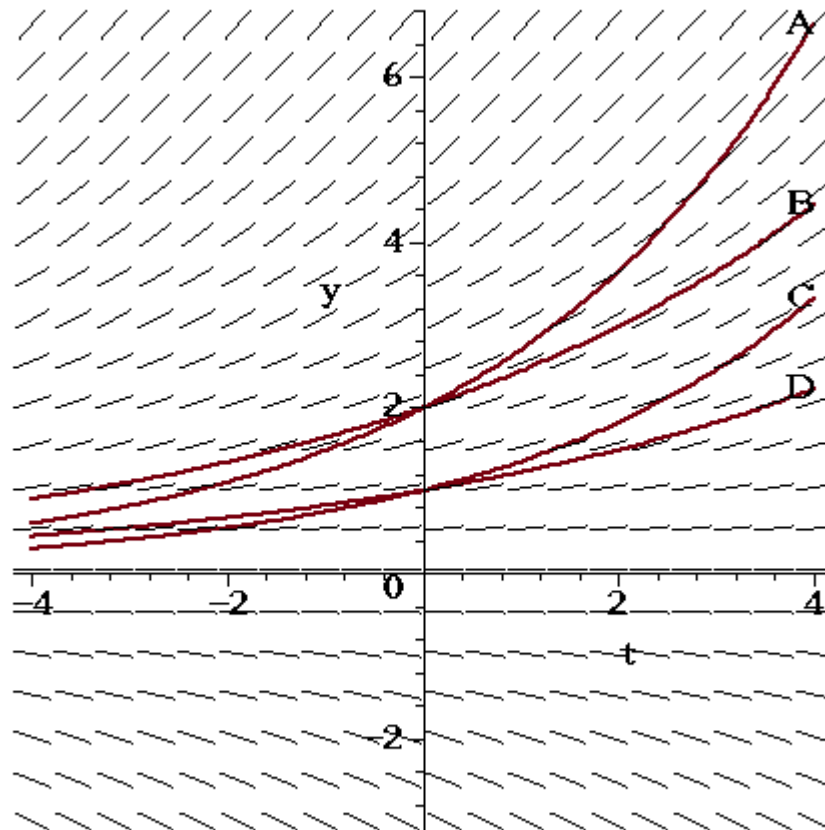
avec $P(x) = 1,568x^2$.

Pour pomper cette couche au sommet du réservoir, il faut la faire passer de x mètres à 5 mètres (car le réservoir mesure 5 m de hauteur). On doit donc l'élever de $5 - x$ mètres. Cela représente un travail de $(5 - x)P(x)\Delta x$ en Joules. Donc, $w(x) = 1,568x^2(5 - x)$.

Comme le réservoir est rempli d'eau seulement jusqu'à 3 m, le travail requis est

$$\begin{aligned} W &= \int_0^3 w(x) dx \\ &= 1,568 \int_0^3 (5 - x)x^2 dx \\ &= 1,568 \left[\frac{5(3)^3}{3} - \frac{3^4}{4} \right] \\ &\approx 3.88^4 \text{ J.} \end{aligned}$$

Question 6. [1 point] Sur le graphique ci-dessous, on a dessiné le champ de pentes d'une équation différentielle $\frac{dy}{dt} = F(t, y)$, ainsi que 4 courbes numérotées A, B, C et D.



Laquelle de ces courbes est le graphe de la solution $y = y(t)$ avec $y(0) = 1$?

Solution. D

Question 7. [2 points] On considère le problème à valeur initiale

$$y' = 0.1x + 0.5y, \quad y(3) = 0.5.$$

Appliquer la méthode d'Euler pour approcher $y(4)$ par pas de $h = 0.5$.

Donner votre approximation pour $y(4)$ avec une précision de ± 0.01 .

Solution. L'équation différentielle à résoudre est de la forme $y' = F(x, y)$ où $F(x, y) = 0.1x + 0.5y$.

Pour le pas $h = 0.5$, la méthode d'Euler consiste à poser $x_0 = 3$ et $y_0 = 0.5$ (puisque $y(3) = 0.5$), puis à définir récursivement

$$x_{n+1} = x_n + h = x_n + 0.5$$

et

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + F(x_n, y_n)h \\ &= y_n + (0.1x_n + 0.5y_n)(0.5) \\ &= y_n + 0.05x_n + 0.25y_n \\ &= 1.25y_n + 0.05x_n, \end{aligned}$$

pour chaque $n = 0, 1, 2, \dots$. Alors on a $y(x_n) \approx y_n$ pour chaque n .

Comme on veut approximer $y(4)$, on arrête lorsque $x_n = 4$.

On trouve :

$$x_1 = 3 + 0.5 = 3.5, \quad y_1 = (1.25)(0.5) + 0.05(3) = 0.775$$

$$x_2 = x_1 + 0.5 = 4, \quad y_2 = (1.25)(0.775) + 0.05(3.5) = 1.14375$$

Donc la réponse est $y(4) \approx 1.14375$.

Page supplémentaire pour brouillon

Page supplémentaire pour brouillon