

MAT 1741A Examen partiel 1

le 15 octobre 2011 Durée: 80 minutes.

Professeur: Thierry Giordano.

Nom de famille: Solomon

Prénom: _____

Numéro d'étudiant(e): _____

| | |
|-----------|---|
| 1 | B |
| 2 | C |
| 3 | B |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| [Bonus] 7 | |
| Total | |

VEUILLEZ LIRE CES INSTRUCTIONS TRÈS ATTENTIVEMENT:

1. Vous avez 80 minutes pour écrire cet examen.
2. Vous n'avez le droit de consulter ni vos notes, ni aucun livre. L'usage de calculatrices, téléphones cellulaires, pagettes et autres n'est pas autorisé.
3. Lisez chaque question attentivement et **répondez à toutes les questions dans l'espace prévu à cet effet**. Pour les questions 4 à 7, vous pouvez utiliser le dos des pages si nécessaire, mais n'oubliez pas de l'indiquer au correcteur!
4. Les questions 1 à 3 valent chacune 1 point,. Il n'y a pas de crédit partiel. Cependant vous devez indiquer la méthode utilisée pour obtenir un point. N'écrire que la réponse ne rapporte aucun point.
5. Les questions 4 et 6 sont à développer. Elles valent chacune 6 points. **Vous devez justifier et rédiger vos réponses correctement pour obtenir tous les points possibles**. La question 7 est une question bonus et vaut 4 points. Pour obtenir des points pour la question bonus numéro 7, votre solution doit être totalement correcte.
6. Good luck! Bonne chance!

1. Soit $\mathcal{P}_2 = \{p \mid p(x) = a+bx+cx^2, \text{ where } a, b, c \in \mathbb{R}\}$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré plus petit ou égal à 2.

Considérons le sous-ensemble suivant de \mathcal{P}_2 :

$$S = \{x^2 - 1, x^2 + 1, x - 1, x + 1\}$$

Parmi les énoncés suivants, lesquels sont vrais?

- I. S est linéairement dépendant
- II. S est linéairement indépendant
- III. S engendre \mathcal{P}_2
- IV. S est une base de \mathcal{P}_2

- A. (I) et (II)
- B. (I) et (III)
- C. (II) et (IV)
- D. (II) et (III)
- E. (I), (III) et (IV)
- F. (III) et (IV)

Comme $\dim \mathcal{P}_2 = 3$ et que S contient 4 polynômes, I est vrai, et IV est faux.

De plus, comme (II) est la négation de (I), (II) est faux.

Donc (A), (C), (D), (E), (F) sont faux et donc la réponse est (B).

2. Soit V un espace vectoriel de dimension 15 et soit W un sous-espace vectoriel de V engendré par $\{v_1, \dots, v_8\}$. Parmi les énoncés suivants, lesquels sont toujours vrais?

- I. $\dim W < 8$
 II. $\dim W \leq 15$ vrai!
 III. $\dim W \leq 7$
 IV. Tout ensemble linéairement indépendant de W contient au plus 8 vecteurs. vrai!

- A. (I) et (II)
 B. (I) et (III)
 C. (II) et (IV)
 D. (II) et (III)
 E. (I), (III) et (IV)
 F. (III) et (IV)

- Comme W est un sous-espace de V et que

$\dim V = 15$, alors $\dim(W) \leq 15$.

- Comme W est engendré par 8 vecteurs,

tout ensemble linéairement indépendant de W a au plus 8 vecteurs et donc IV est vrai.

- I et III ne sont pas toujours vrais.

3. Parmi les sous-ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 ?

sev (I) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0 \right\}$ plane passant par 0 et normal à $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
d'un sev.

(II) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0 \right\}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{(II)}$, mais $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin \text{(II)}$
d'un (II) n'est pas un sev.

sev (III) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2z \right\}$

(IV) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = y + 3 = z \right\}$

(III) est un sev, car c'est le
plane passant par 0 et de normal
 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

A. (I) et (II)

B. (I) et (III)

C. (II) et (IV)

D. (II) et (III)

E. (I), (III) et (IV)

F. (III) et (IV)

(IV) n'est pas un sev, car $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \text{(IV)}$

4. Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{F}([-1, 1]) = \{f \mid f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$ des fonctions de $[-1, 1]$ dans \mathbb{R} , muni des opérations standards. Rappelons que le vecteur nul de $\mathbb{F}([-1, 1])$ est la fonction identiquement nulle, c'est-à-dire la fonction qui prend la valeur 0 pour tout $x \in [-1, 1]$.

Définissons trois fonctions f , g et h de $\mathbb{F}([-1, 1])$ par

$$f(x) = x, \quad g(x) = 1 - 2x + x^2, \quad \text{et} \quad h(x) = 1 + x^3.$$

Soit $W = \text{Span}\{f, g, h\}$ l'enveloppe linéaire de $\{f, g, h\}$.

- Montrer que f , g et h sont linéairement indépendants.
- Exhiber une base de W et déterminer la dimension de W .
- Si $k \in \mathbb{F}([-1, 1])$ est la fonction définie par $k(x) = 2 + x^2 + x^3$, pour $x \in [-1, 1]$, montrer que $k \in W$.
- Déterminer la dimension du sous-espace $Y = \text{Span}\{f, g, h, k\}$?
(Vous devez justifier vos réponses)

a) Approche: Si $af + bg + ch = 0$, alors $a = b = c = 0$.

Comme $af + bg + ch = 0$, on a $ax + b(1 - 2x + x^2) + c(1 + x^3) = 0$, $\forall x \in [-1, 1]$.

Donc $\underline{cx^3 + bx^2 + (a - 2b)x + (b + c) = 0}$, $\forall x \in [-1, 1]$

1^{ère} méthode: polynôme de $d^0 \leq 3$ avec une infinité de zéros, d'où ce polynôme est identiquement nul.

Comme $\{1, x, x^2, x^3\}$ base de \mathbb{P}_3 , $c = b = a - 2b = b + c = 0$.

Donc $a = b = c = 0$.

2^{ème} méthode: en $x=0$: $b + c = 0 \Rightarrow c = -b$. ①

en $x=1$: $c + b + a - 2b + b + c = 0 \Rightarrow a - 2b = 0$ ③

en $x=-1$: $-c + b + 2b - a = 0 \Rightarrow c = b$. ②

De ① et ②, on a $b = c = 0$ et de ③, $a = 0$.

$$6 \quad \left. \begin{array}{l} b) \{f, g, h\} \text{ syst. de g\u00e9n. de } W. \\ \{f, g, h\} \text{ lin. ind\u00e9p par le } p \end{array} \right\} \Rightarrow \{f, g, h\} \text{ base de } W.$$

et donc $\dim W = 3$.

c) Soit P d\u00e9f. par $P(x) = 2 + x^2 + x^3$. Notons que

$$h(x) + g(x) = (x^3 + 1) + (1 - 2x + x^2) = x^3 + x^2 + 2 - 2x.$$

D'o\u00f9 $P(x) = h(x) + g(x) + 2x = h(x) + g(x) + 2P(x)$, d'o\u00f9 $P \in W$.

d) Comme $P \in W$ et que $W = \text{Span}\{f, g, h\}$, on a

$\text{Span}\{f, g, h, P\} = \text{Span}\{f, g, h\} = W$; d'o\u00f9 $\dim(Y) = 3$.

5. Soit $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et considérons les sous-espaces de \mathbb{R}^3 donnés par

$$X = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v \times w = 0\} \quad \text{et} \quad U = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v \cdot w = 0\}.$$

a) Montrer que $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x \\ -2x \end{pmatrix}$.

b) Utiliser (a) pour trouver un système de générateurs de X et ensuite une base B de X .

c) Exhiber une base de U .

d) Etendre la base B en une base de \mathbb{R}^3 .

e) Donner une description géométrique complète de X et de U .

(Vous devez justifier vos réponses)

$$a) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2z - y \\ x \\ -2x \end{pmatrix}$$

$$b) X = \left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; v \times w = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; \begin{pmatrix} y - 2z \\ -x \\ -2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; x=0 \text{ and } y=2z \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Spanne}(w)$$

Comme $w \neq 0$, $B = \{w\}$ est une base de X , car $\{w\}$ est lin. indép et une syst. de gén. de X .

c) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; 2y + z = 0 \right\}$, et le plan passe par l'origine et normal à w .

Soit dire $U = 2$; $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \in U$ et sont non colinéaires d'où $\{u_1, u_2\}$ lin. indép et donc (dire $U = 2$) une base de U .

d) $w = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \notin U$ (car $w \cdot w = \|w\|^2 \neq 0$, or $w \perp \bar{a} U$.)

$\{u_1, u_2\}$ base de U , d'où lin. indép.)

/ D'où par le thm.

$w \notin U = \text{span}\{u_1, u_2\}$

ou au contrs $\{w, u_1, u_2\}$ lin. indép.

Comme dim $\mathbb{R}^3 = 3$, $\{w, u_1, u_2\}$ base de \mathbb{R}^3 et

comme $B = \{w\}$, elle étend B .

e) Déjà or, U est le plan passant par 0 et normal à w

$X = \text{span}\{w\}$ est donc la droite passant par 0 et perpendiculaire par w .

Rem. La droite X est \perp à U .

6. Soit u, v et w des vecteurs d'un espace vectoriel V .

a) Donner la définition de " $\{u, v\}$ est un ensemble linéairement indépendant."

$\{u, v\}$ est lin. indép., si $\left[a u + b v = 0, \text{ pour } a, b \in \mathbb{R} \right] \Rightarrow [a = b = 0]$
 ou encore la seule comb. lin. de u et v réalisant le vecteur nul est la comb. lin. triviale

On fait dès maintenant l'hypothèse (*) suivante:

$\{u, v\}$ est un ensemble linéairement indépendant, alors que $\{u, v, w\}$ est un ensemble linéairement dépendant.

Montrer alors que l'énoncé (b) ci-dessous est soit toujours vrai (c'est-à-dire pour tout triple de vecteurs u, v et w satisfaisant (*)) ou donner un contre-exemple (avec $V = \mathbb{R}^2$ ou $V = \mathbb{R}^3$) montrant que l'énoncé (b) n'est pas toujours vrai.

b) $w \in \text{Span}\{u, v\}$ est vrai. En effet, par hyp., $\exists (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

tg. $a w + b u + c v = 0$. De plus $a \neq 0$, car sinon, $a = 0$ et donc

$$a w + b u + c v = 0 \cdot w + b u + c v = b u + c v = 0.$$

Mais par hyp., $\{u, v\}$ lin. indép., d'où si $b u + c v = 0$, alors $b = c = 0$.

et donc $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, ce qui contredit l'hyp.

D'où $a \neq 0$ et $w = -\frac{b}{a} u + \left(-\frac{c}{a}\right) v \in \text{Span}\{u, v\}$.

c) Même question avec l'énoncé: $u \in \text{Span}\{v, w\}$. Cet énoncé est faux!

En effet si $w = v$, alors $\{w, u, v\} = \{v, u, v\}$ est lin. dép.
 mais $u \notin \text{Span}\{v, v\} = \text{Span}\{v\}$, car $\{u, v\}$ sont lin. indép.

7. [Bonus]. Soit $\{u, v, w\}$ 3 vecteurs de \mathbb{R}^3 tq. $u \cdot v \times w = 2$.
 Montrer que $\{u, v, w\}$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Réponse: $u \cdot v \times w = u \cdot (v \times w)$

On peut supposer que $\{v, w\}$ lin. indép., car sinon $v \in \text{Span}\{w\}$
 et ds ce cas $v \times w = (av) \times w = a(w \times w) = 0$, ce qui contredit
 dit l'hyp. $u \cdot (v \times w) \neq 0$.

Pour montrer que $\{u, v, w\}$ est une base de \mathbb{R}^3 , il suffit (dans \mathbb{R}^3)
 de montrer que $\{u, v, w\}$ lin. indép., c-à-d (car $\{v, w\}$ lin. indép.)
 que $u \notin \text{Span}\{v, w\}$.

Si oui, $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tq. $u = av + bw$ et on a:

$$u \cdot (v \times w) = (av) \cdot (v \times w) + (bw) \cdot (v \times w) = a(v \cdot v \times w) + b(w \cdot v \times w).$$

Comme $v \times w$ est \perp à v et w , on a: $v \cdot (v \times w) = w \cdot (v \times w) = 0$

Donc $u \cdot (v \times w) = 0$. Donc $u \notin \text{Span}\{v, w\}$.