MAT 2777, Probabilité et statistique pour ingénieurs

Devoir 5 - solutionnaire

[6] 1. On calcul la moyenne de l'échantillon $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n = 0,39125$ et l'écart type de l'échantillon

$$s = \sqrt{\frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2/n}{n-1}} = 0,048576.$$

Un intervalle de confiance à 95% pour la perte à la corrosion moyenne est

$$\overline{x} \pm t_{0,025;7} \frac{s}{\sqrt{n}} = [0,355; 0,428],$$

où $t_{0.025;7} = 2.365$.

[8] 2. a) Un intervalle de confiance à 90% pour la porosité moyenne pour des spécimens de ce type de béton est

$$\overline{x} \pm z_{0,05} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = [20,88; 22,32],$$

où $z_{0,05} = 1,645$, $\overline{x} = 21,6$, $\sigma = 3,2$ et $n = 53$.

(b) Un intervalle de confiance à 95% pour la porosité moyenne pour des spécimens de ce type de béton est

$$\overline{x} \pm z_{0,025} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = [20,74; 22,46],$$

où $z_{0,025} = 1,96$.

(c) La longueur de l'intervalle est $22,2 - 21 = 1,2$, qui est

$$(\overline{x} + z_{0,025} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) - (\overline{x} - z_{0,025} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 2\, z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = (0,87911)\, z_{\alpha/2}.$$

Alors, $z_{\alpha/2} = 1,2/0,87911 \approx 1,37$. Alors, $\alpha/2 = 1 - 0,9162$. Ce qui implique $1 - \alpha = 0,324$. Donc le niveau de confiance est 83%.

(d) Résoudre

$$n \geq \left(\frac{z_{0,025}\, \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1,96\,(3,2)}{0,3}\right)^2 = 437,0887.$$

Il nous faut 438 observations.

3. (a) Un intervalle de confiance à 95% limité à la droite pour la perte de masse moyenne est

$$\overline{x} + t_{0,05;24}\frac{s}{\sqrt{n}} = 3,27 + 1,711\left(\frac{0,75}{\sqrt{25}}\right) = 3,527.$$

Alors, nous sommes 95% confiant que $\mu < 3,527$. À un niveau de signification de $\alpha = 5\%$, on ne peut pas conclure que $\mu < 3,5$.
(b) La valeur de la statistique du test est

$$t_0 = \frac{\overline{x} - 3,5}{s/\sqrt{n}} = \frac{3,27 - 3,5}{0,75/\sqrt{25}} = -1,533.$$

Puisque l'alternative est unilatérale à la gauche, alors la valeur p est

$$p = P(T < -1,533), \quad \text{where } T \sim t(24).$$

Par la symétrie de la loi t, on peut réexprimer la valeur p de la façon suivante : $p = P(T > 1,533)$. Puisque $t_{0,10;24} = 1,318$ et $t_{0,10;24} = 1,711$, alors

$$0,05 < p < 0,10.$$

À $\alpha = 5\%$, on a $p > \alpha$, alors les preuves contre H_0 ne sont pas significatives.

[8] 4. (a) Soit μ l'épaisseur moyen du paroi (en mils). On veut tester

$$H_0 \ : \ \mu = 4 \quad \text{contre} \quad H_1 \ : \ \mu \neq 4.$$

(b) Nous concluons que les bouteilles ne répondent pas aux spécifications, mais dans la réalité, les spécifications sont respectées.
(c) Nous concluons que les preuves que les bouteilles ne sont pas conformes aux spécifications ne sont pas significatives (c'-à-d. nous concluons que les bouteilles répondent aux spécifications), mais dans la réalité, les spécifications ne sont pas respectées.
(d) La valeur observée de la statistique du test est

$$t_0 = \frac{\overline{x} - 4}{s/\sqrt{n}} = 1,3732,$$

où $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n = 4,03414$ et

$$s = \sqrt{\frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2/n}{n-1}} = 0,06578.$$

Rejet de H_0 seulement si $|t_0| > t_{0,025;6} = 2,447$.

Puisque $|t_0| = 1,3732$ n'est pas tomber dans la région critique, alors les preuves que les bouteilles ne sont pas conformes aux spécifications ne sont pas significatives.

[6] 5. (a) Soit μ l'indice d'octane moyen (en %). On veut tester

$$H_0 : \mu = 90 \quad \text{contre} \quad H_1 : \mu > 90.$$

(b) La valeur observée de la statistique du test est

$$t_0 = \frac{\overline{x} - 90}{s/\sqrt{n}} = 0,5199,$$

où $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n = 90,3$ et

$$s = \sqrt{\frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2/n}{n-1}} = 1,2903.$$

Nous allons rejetter H_0, seulement si $t_0 > t_{0,05;4} = 2,132$. Puisque $t_0 \leq 2,132$, alors nous ne pouvont pas conclure que l'indice d'octane moyen est plus grand que 90.
(c) C'est une alternative à la droite, alors la valeur p est

$$p = P(T > 0,5199), \quad \text{où } T \sim T(4).$$

Puisque $t_{0,4;4} = 0,271$ and $t_{0,25;4} = 0,741$, alors

$$0,25 < p\text{-value} < 0,4.$$

[6] 6. (a) Si $\mu = 11,5$, alors

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - 12}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(\phi, 1),$$

où

$$\phi = \sqrt{n}\frac{(11,5-12)}{\sigma} = \sqrt{10}\frac{(11,5-12)}{2} = -0,7906.$$

Ne pas rejeter H_0 veut dire que $z_0 \geq -z_{0,05}$, où $-z_{0,05} = -1,645$. On veut

$$\begin{aligned}
\beta(11,5) &= P(\text{ne pas rejeter } H_0|\mu = 11,5) \\
&= P(Z_0 \geq -1,645|\mu = 11,5) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{-1,645-(-0,7906)}{1}\right) \\
&= 1 - \Phi(-0,85) = 1 - 0,1977 = 0,8023.
\end{aligned}$$

(b) Si $\mu = 10$, alors

$$Z_0 = \frac{\overline{X}-12}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(\phi, 1),$$

où

$$\phi = \sqrt{n}\frac{(10-12)}{\sigma} = \sqrt{10}\frac{(10-12)}{2} = -3,1622.$$

Ne pas rejeter H_0 veut dire que $z_0 \geq -z_{0,05}$, où $-z_{0,05} = -1,645$. On veut

$$\begin{aligned}
\beta(10) &= P(\text{ne pas rejeter } H_0|\mu = 10) \\
&= P(Z_0 \geq -1,645|\mu = 10) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{-1,645-(-3,1622)}{1}\right) \\
&= 1 - \Phi(1,52) = 1 - 0,9357 = 0,0643.
\end{aligned}$$

(c) C'est une alternative unilatérale, alors

$$n = \frac{(z_\beta + z_\alpha)^2}{(\mu_1-\mu_0)^2}\,\sigma^2 = \frac{(z_{0,01}+z_{0,05})^2}{(10-12)^2}\,2^2 = 15,77,$$

où $z_{0,01} = 2,326$ et $z_{0,05} = 1,645$. Alors, il nous faut $n = 16$ observations.

[/**34**]