Mat 1748 Hiver 2015

Solution du devoir 1

---

(1) Démontrez l'équivalence

$$A \Rightarrow (B \vee C) \quad \equiv \quad (A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)$$

par la méthode des manipulations algébriques. Notez bien:

- Vous pouvez seulement utiliser les équivalences qui sont énoncées dans la table donnée à la page 12 des notes. Justifiez chaque équivalence en écrivant le numéro correspondant (les numéros qui sont donnés dans la table).
- Ne sautez AUCUNE étape. N'omettez pas les parenthèses internes: par exemple, vous n'avez pas le droit d'écrire que $\neg A \vee (B \vee C) \equiv \neg A \vee B \vee C$.

Solution.

$$\begin{aligned}
A \Rightarrow (B \vee C) &\overset{(1)}{\equiv} \neg A \vee (B \vee C) \\
&\overset{(10)}{\equiv} [\neg A \vee \neg A] \vee (B \vee C) \\
&\overset{(15)}{\equiv} \neg A \vee [\neg A \vee (B \vee C)] \\
&\overset{(15)}{\equiv} \neg A \vee [(\neg A \vee B) \vee C] \\
&\overset{(15)}{\equiv} [\neg A \vee (\neg A \vee B)] \vee C \\
&\overset{(13)}{\equiv} [(\neg A \vee B) \vee \neg A] \vee C \\
&\overset{(15)}{\equiv} (\neg A \vee B) \vee [\neg A \vee C] \\
&\overset{(1)}{\equiv} (A \Rightarrow B) \vee [A \Rightarrow C]
\end{aligned}$$

(2) Trouvez une formule φ en forme normale disjonctive (FND) ayant la table de vérité suivante :

X	Y	Z	φ
V	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**F**
F	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**F**

Solution.

X	Y	Z	φ	
V	**V**	**V**	**V**	$(X \wedge Y \wedge Z)$
V	**V**	**F**	**F**	
V	**F**	**V**	**F**	
V	**F**	**F**	**V**	$(X \wedge \neg Y \wedge \neg Z)$
F	**V**	**V**	**F**	
F	**V**	**F**	**V**	$(\neg X \wedge Y \wedge \neg Z)$
F	**F**	**V**	**V**	$(\neg X \wedge \neg Y \wedge Z)$
F	**F**	**F**	**F**	

Ainsi, la formule suivante est une des réponses possibles :

$$(X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z)$$

(3) Trouvez une formule φ satisfaisant les deux conditions suivantes :

- les symboles permis pour écrire φ sont : X, Y, $\neg$, $\Rightarrow$, et les parenthèses.
- φ a la table de vérité suivante :

X	Y	φ
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**V**

Solution. Puisque la table de vérité de $X \Leftrightarrow Y$ est celle donnée ci-dessus, φ doit être équivalente à $X \Leftrightarrow Y$. De plus, si α et β sont des formules alors $\alpha \wedge \beta \equiv \neg\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \equiv \neg(\alpha \Rightarrow \neg\beta)$, d'où :

$$(*) \qquad \alpha \wedge \beta \equiv \neg(\alpha \Rightarrow \neg\beta).$$

Ainsi,

$$(X \Leftrightarrow Y) \equiv (X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X) \overset{(*)}{\equiv} \neg((X \Rightarrow Y) \Rightarrow \neg(Y \Rightarrow X)),$$

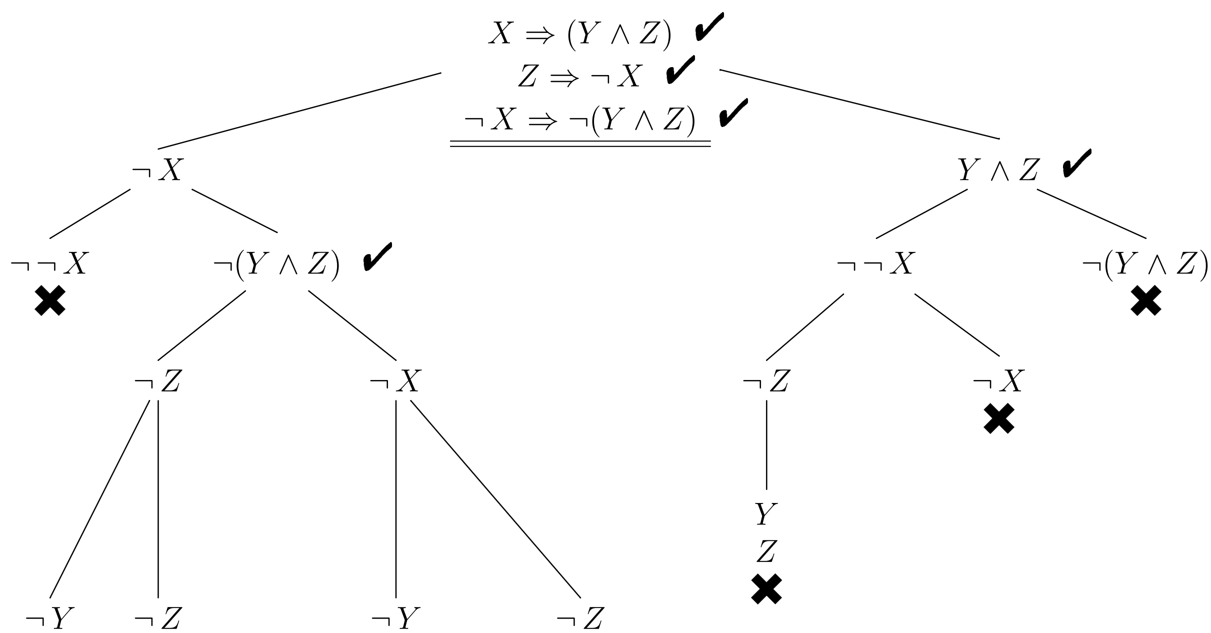
donc $\varphi = \neg((X \Rightarrow Y) \Rightarrow \neg(Y \Rightarrow X))$ est une réponse possible.

(4) En utilisant les arbres de vérité, décidez si l'ensemble de formules

$$\{\ X \Rightarrow (Y \wedge Z),\ Z \Rightarrow \neg X,\ \neg X \Rightarrow \neg(Y \wedge Z)\ \}$$

est satisfaisable et, s'il l'est, donnez toutes les valuations qui le satisfont.

Solution. L'arbre de $\mathcal{E} = \{\ X \Rightarrow (Y \wedge Z),\ Z \Rightarrow \neg X,\ \neg X \Rightarrow \neg(Y \wedge Z)\ \}$ est :



Il y a des branches ouvertes, donc $\mathcal{E}$ est satisfaisable.
Il y a quatre branches ouvertes, et pour chacune d'elles on donne les valuations qui satisfont tous les littéraux de la branche :

branche ouverte	X	Y	Z
1	**F**	**F**	**F**
2	**F**	$*$	**F**
3	**F**	**F**	$*$
4	**F**	$*$	**F**

On trouve donc trois valuations qui satisfont $\mathcal{E}$:

X	Y	Z
F	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**V**

(5) Pour chacun des arguments suivants, dites s'il est valide ou invalide. Donnez seulement la réponse, sans la justifier.

(a) $\dfrac{A \vee B \quad \neg B}{A}$ **Réponse :** valide.

$$\begin{array}{l} A \vee B \\ \neg B \\ \hline A \end{array}$$

(b) **Réponse :** valide.

$$\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ \neg B \\ \hline \neg A \end{array}$$

(c) **Réponse :** invalide.

$$\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ B \\ \hline A \end{array}$$

(d) **Réponse :** valide.

$$\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ A \\ \hline B \end{array}$$

(e) **Réponse :** invalide.

$$\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ \neg A \\ \hline \neg B \end{array}$$

(f) **Réponse :** valide.

$$\begin{array}{l} A \wedge B \\ \neg A \\ \hline \neg B \end{array}$$

(g) Si le gouvernement nous cache quelque-chose, on ne trouvera aucune preuve.
Or, on ne trouve aucune preuve.
Donc le gouvernement nous cache quelque-chose.

Réponse : invalide. (C'est l'argument (c).)

(h) Si on réduit les impôts pour les riches, l'activité économique augmentera.
Donc, pour que l'activité économique augmente, il faut réduire les impôts pour les riches.

Réponse : invalide. (C'est l'argument $\begin{array}{c} A \Rightarrow B \\ \hline B \Rightarrow A \end{array}$, qui est invalide.)

(i) **Réponse :** valide.

$$\begin{array}{l} 0 < 1 \Rightarrow 3 < 2 \\ 0 < 1 \\ \hline 3 < 2 \end{array}$$

Il y a deux façons de voir que l'argument (i) est valide. (1) C'est l'argument (d), qui est valide. (2) C'est l'argument $\begin{array}{c} \mathbf{F} \\ \mathbf{V} \\ \hline \mathbf{F} \end{array}$, qui est valide parce que l'ensemble de ses prémisses est $\{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}$, qui est un ensemble non satisfaisable.

(6) En utilisant les atomes donnés plus bas, traduisez l'argument suivant du français à la logique. Utilisez ensuite la méthode "du raccourci" pour décider si l'argument est valide; s'il n'est pas valide, donnez un contrexemple.
Si l'Égypte a besoin d'armes, soit les Russes, soit les Américains les fourniront (mais pas les deux). Les Russes fourniront les armes seulement si l'Égypte n'en a pas besoin. Si les Chinois fournissent des armes, alors les Américains n'en fourniront pas. Donc, si l'Égypte a besoin d'armes, les Chinois n'en fourniront pas.
E: *L'Égypte a besoin d'armes.*
R: *Les Russes fourniront les armes.*
A: *Les Américains fourniront les armes.*
C: *Les Chinois fourniront les armes.*

Solution.

$$\begin{array}{l} E \Rightarrow [(R \vee A) \wedge \neg(R \wedge A)] \\ R \Rightarrow \neg E \\ C \Rightarrow \neg A \\ \hline E \Rightarrow \neg C \end{array}$$

Supposons que $\alpha = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline E & R & A & C \\ \hline ? & ? & ? & ? \\ \hline \end{array}$ est un contre-exemple de l'argument.

Puisque α ne satisfait pas $(E \Rightarrow \neg C)$, on a $\alpha = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline E & R & A & C \\ \hline \mathbf{V} & ? & ? & \mathbf{V} \\ \hline \end{array}$.

Puisque C est **V** et α satisfait $(C \Rightarrow \neg A)$, on a $\alpha = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline E & R & A & C \\ \hline \mathbf{V} & ? & \mathbf{F} & \mathbf{V} \\ \hline \end{array}$.

Puisque E est **V** et α satisfait $(R \Rightarrow \neg E)$, on a $\alpha = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline E & R & A & C \\ \hline \mathbf{V} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{V} \\ \hline \end{array}$.

Or, la valuation $\alpha = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline E & R & A & C \\ \hline \mathbf{V} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{V} \\ \hline \end{array}$ ne satisfait pas $E \Rightarrow [(R \vee A) \wedge \neg(R \wedge A)]$. Donc α n'est pas un contre-exemple de l'argument, et ceci montre que l'argument n'admet aucun contre-exemple.
Donc cet argument est valide.

(7) En utilisant les atomes donnés plus bas, traduisez l'argument suivant du français à la logique. Utilisez ensuite la méthode de l'arbre de vérité pour décider si l'argument est valide; s'il n'est pas valide, donnez un contrexemple.
À moins que les Vulcains ne quittent la Fédération et se joignent aux Romuliens, les Klingons attaqueront les Romuliens. Si les Klingons attaquent les Romuliens, les Romuliens se rendront et se joindront aux Klingons pour attaquer la Fédération. Si les Klingons et les Romuliens attaquent ensemble la Fédération, la Fédération sera détruite. Donc, si les Vulcains restent dans la Fédération, elle sera détruite.
Q: *Les Vulcains quittent la Fédération.*
U: *Les Vulcains se joignent aux Romuliens.*
K: *Les Klingons attaquent les Romuliens.*
R: *Les Romuliens se rendent.*
J: *Les Romuliens se joignent aux Klingons.*
A: *Les Romuliens et les Klingons attaquent ensemble la Fédération.*
D: *La Fédération est détruite.*

Solution.

> Remarque. La phrase "X, à moins que Y" signifie $X \vee Y$. Par exemple :
>
> *Aujourd'hui c'est lundi, à moins que ce ne soit mardi* $\equiv$ *aujourd'hui c'est lundi OU mardi.*
>
> La phrase "À moins que X, Y" signifie la même chose que "Y, à moins que X", qui signifie $(Y \vee X)$. On peut aussi traduire "à moins que X, Y" par $(\neg X \Rightarrow Y)$ ou par $(\neg Y \Rightarrow X)$. Le fait qu'il y ait plusieurs traductions possibles ne pose pas de problème, parce que ces différentes formules sont toutes équivalentes : $(Y \vee X) \equiv (X \vee Y) \equiv (\neg X \Rightarrow Y) \equiv (\neg Y \Rightarrow X)$.

La première phrase de l'argument est : À moins que $(Q \wedge U)$, K.

Vous pouvez la traduire par l'une des formules suivantes (qui sont équivalentes) :

- $(Q \wedge U) \vee K$
- $K \vee (Q \wedge U)$
- $\neg(Q \wedge U) \Rightarrow K$
- $\neg K \Rightarrow (Q \wedge U)$

Je choisis $\neg(Q \wedge U) \Rightarrow K$ pour la suite de cette solution. La deuxième phrase de l'argument est

$K \Rightarrow$ les Romuliens se rendront et se joindront aux Klingons pour attaquer la Fédération.

Dans cette phrase, le mot "pour" n'indique pas une implication, mais plutôt un $\wedge$. Par exemple, si je dis "Je me joins à toi pour accomplir la tâche", cela signifie que je me joins à toi et que nous accomplirons la tâche ensemble.

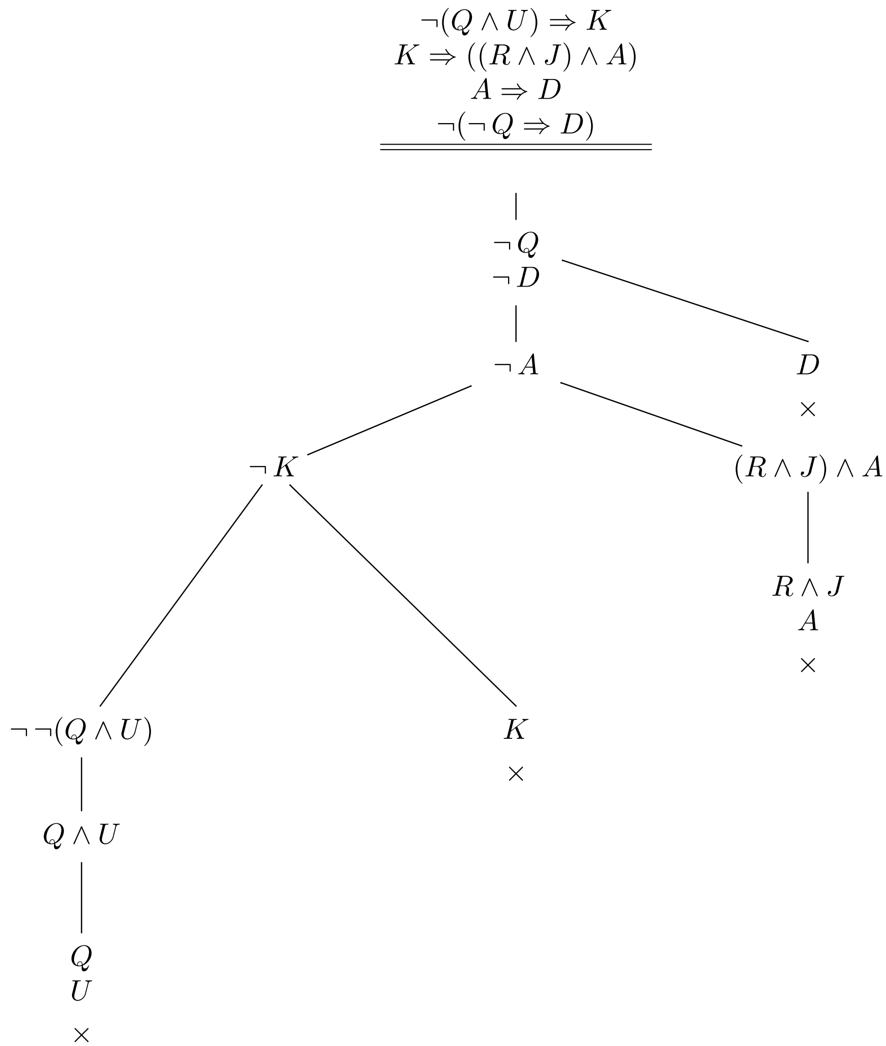
Donc la deuxième phrase peut se traduire par $K \Rightarrow (R \wedge J \wedge A)$.

Les autres phrases sont moins difficiles à traduire. L'argument est :

$$\begin{array}{l} \neg(Q \wedge U) \Rightarrow K \\ K \Rightarrow ((R \wedge J) \wedge A) \\ A \Rightarrow D \\ \hline \neg Q \Rightarrow D \end{array}$$

On construit l'arbre de $\mathcal{E} = \{\neg(Q \wedge U) \Rightarrow K,\ K \Rightarrow ((R \wedge J) \wedge A),\ A \Rightarrow D,\ \neg(\neg\, Q \Rightarrow D)\ \}$.

Notez bien que l'élément $\neg(\neg\, Q \Rightarrow D)$ de $\mathcal{E}$ est **la négation** de la conclusion.



L'arbre n'a aucune branche ouverte, donc aucune valuation ne satisfait $\mathcal{E}$, donc l'argument n'a aucun contre-exemple. **Donc l'argument est valide.**

Remarque. Dans la deuxième prémisse j'ai remplacé $(R \wedge J \wedge A)$ par $((R \wedge J) \wedge A)$ parce que les rèlges de branchement (pour les arbres de vérité) supposent qu'on n'a pas omis de parenthèses internes. Autrement dit, la règle

$$\begin{array}{c} (R \wedge J \wedge A) \\ | \\ R \\ J \\ A \end{array}$$

n'existe pas. Ceux qui ont utilisé cette “pseudo règle” ne seront pas pénalisés **cette fois-ci**, parce que je n'ai pas expliqué ce point avant le devoir. Mais à l'avenir il y aura des pénalités pour ceux qui commettent cette faute.

Pondération.

(1) Sur 4 points.
(2) Sur 4 points.
(3) Pas corrigé.
(4) Sur 6 points.
(5) Sur 9 points.
(6) Sur 4 points :
   - 4 points pour la traduction et pour écrire correctement l'argument en formules logiques, avec la barre horizontale, etc.
   - Ne sera pas corrigé : le raisonnement par la méthode "du raccourci".
   - Ne sera pas corrigé : la réponse "l'argument est valide".

(7) Sur 8 points.
   - 4 points pour écrire correctement l'argument en formules logiques, avec la barre horizontale, etc. (Enlever un point pour chaque faute.)
   - 3 points pour l'arbre.
   - 1 point pour "l'argument est valide".

Total sur 35 points.