MAT 1732, Hiver 2016, Devoir 3

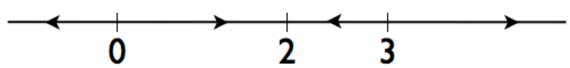
Solutionnaire

Question 1.

(a) (1 point) $P^3 - 5P^2 + 6P = P(P^2 - 5P + 6) = P(P-3)(P-2) = F(P)$
Donc les points d'équilibre sont $P_1 = 0; P_2 = 2$ et $P_3 = 3$

(b) (1 point) $F'(P) = 3P^2 - 10P + 6$
Donc en $P_1 = 0$ on a $F'(0) = 6 > 0$ point instable.
en $P_2 = 2$ on a $F'(2) = -2 < 0$ point stable.
en $P_3 = 3$ on a $F'(3) = 3 > 0$ point instable.

(c) (1 point) Ce qui donne le portrait de phases suivant:



Question 2.

(a) $\frac{dP}{dt} = KP$ donc $\frac{dP}{P} = Kdt$ d'où $lnP = Kt + C$ qu'on peut écrire sous la forme: $P(t) = Ae^{Kt}$ or les conditions$P(0) = 600$ et $P(3) = 1000$ nous donnent que $A = 600$ et que $K = \frac{ln(5/3)}{3} = 0,170275$.
Donc finalement $P(t) = 600e^{0,170275t}$

(b) $P(8) = 600e^{0,17025\times 8} = 2342.86 \sim 2342$ bactéries.

(c) on cherche t tel que $P(t) = 40000$ c'est à dire que $600e^{0,170275t} = 40000$ ce qui donne:

$$t = \frac{ln(200/3)}{0,170275} = 24.66\text{heures}.$$

Question 3.

(a) (1 point) l'équation différentielle qui reflète cette situation est:

$$\frac{dQ}{dt} = -Kt$$

où $Q(t)$ est la quantité de l'uranium restante à l'instant t.

(b) (2 points) En prenant pour unité du temps un million d'années. Il s'agit d'un modèle exponentiel, donc $Q(t) = Ae^{-Kt}$ avec les conditions $Q(0) = 100$ et $Q(700) = 50$ on obtient que:
$A = 100$ et $K = 0,00099$. Ce qui donne

$$Q(t) = 100e^{-0,00099\times t}$$

(c) (1 point) Après 2 millions d'années, il va rester

$$Q(2) = 99,8 \text{grammes}.$$

C'est à dire presque la quantité initiale.

Question 4.

(a) $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{4x-2}}{e^{4y}}$ donc en séparant les variables, on a:
$e^{4y}dy = e^{4x-2}dx$ d'où $\int e^{4y}dy = \int e^{4x-2}dx$ ce qui donne , $\frac{e^{4y}}{4} = e^{4x-2}4 + c$ ou ce qui est équivalent:

$$e^{4y} = e^{4x-2} + K$$

(b) (2 points) $y^3\frac{dy}{dx} = 5x^4y^4 - 40x^4$ en séparant les variables, on obtient:
$y^3\frac{dy}{y^4-8} = 5x^4dx$ d'où $\frac{ln|y^4-8|}{4} = x^5 + C$ ce qui est équivalent à:

$$ln|y^4 - 8| = 4x^5 + K$$

(c) (1 point) On a $\frac{dy}{dt} = y\frac{cos(\pi t)}{sin(\pi t)}$ en séparant les variables, on a:
$\frac{dy}{y} = \frac{cos(\pi t)}{sin(\pi t)}dt$ avec un changement de variables $u = sin(\pi t)$ on obtient:
(1 point) $ln|y| = \frac{1}{\pi}ln|sin(\pi t)| + C$ qui est la solution générale.
la condition $y(1/2) = 3$ nous donne que $C = ln(3)$ d'où finalement;
(1 point) $ln|y| = \frac{1}{\pi}ln|sin(\pi t)| + ln(3) = ln(3|sin(\pi t)|^{\frac{1}{\pi}})$. Ce qui est équivalent à:

$$y = 3|sin(\pi t)|^{\frac{1}{\pi}}$$