

Solution de l'examen final

Mat1739 (B) Calcul et vecteurs

28 avril, 2010

14:00-17:00

Truong Nguyen-Ba

Département de Mathématiques et Statistiques

Université d'Ottawa

e-mail: trnguyen@uottawa.ca

Solution de l'examen final

MAT 1739 B

Enseignant: Truong Nguyen-Ba

28 avril, 2010

14:00-17:00

Nom: _____

No. d'étudiant: _____

- À livre fermé.
- Seules les calculatrices non-programmables, non graphiques sont autorisées.
- Il y a huit questions d'une valeur de 100 points au total.
- Donner le détail de vos calculs.
- S'il vous plaît répondez aux questions dans l'espace prévu, en indiquant clairement à quelle question vous répondez. Utilisez le verso des pages si nécessaire, mais s'il vous plaît indiquer que vous le faites.

Bonne chance!

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Total
/10	/15	/15	/10	/15	/10	/15	/10	/100

Problème 1: (10 points)

Soit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ c, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pour quelle valeur de c , $f(x)$ est-elle continue à $x = 0$?

Solution (Problème 1) (10 points):

$f(x)$ est continue à $x = 0$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = c$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x} \cdot \frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}+2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+x})^2 - 2^2}{x(\sqrt{4+x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{4+x}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{4+x}+2)} = \frac{1}{4}$$

Donc $c = \frac{1}{4}$.

Problème 2: (15 points)

Trouver la dérivée des fonctions suivantes. Ne pas simplifier.

(a)

$$y = (2x^3 + 4x + 1)e^{\cos 2x}.$$

(b)

$$y = \frac{\sin 3x}{3^x + 4^x}.$$

Solution (2, a) (7 points):

$$\begin{aligned} y' &= (2x^3 + 4x + 1)'e^{\cos 2x} + (2x^3 + 4x + 1)(e^{\cos 2x})' \\ &= (6x^2 + 4)e^{\cos 2x} + (2x^3 + 4x + 1)(e^{\cos 2x}(-\sin 2x) \cdot (2x)'). \\ &= (6x^2 + 4)e^{\cos 2x} + (2x^3 + 4x + 1)(e^{\cos 2x}(-\sin 2x) \cdot 2). \end{aligned}$$

Solution (2, b) (8 points):

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sin 3x)'(3^x + 4^x) - (\sin 3x)(3^x + 4^x)'}{(3^x + 4^x)^2} \\ &= \frac{(\cos 3x \cdot 3)(3^x + 4^x) - (\sin 3x)((\ln 3)3^x + (\ln 4)4^x)}{(3^x + 4^x)^2}. \end{aligned}$$

Problème 3: (15 points)

Soit $f(x) = \frac{x^2-x+6}{x^2-x-6}$.

- (a) Déterminer l'ensemble de départ de la fonction
 (b) Trouver les asymptotes verticales.
 (c) Déterminer tous les points de minimum local et de maximum local, s'ils existent.

Solution (3, a) (5 points):

Le dénominateur doit être différent de zéro: $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) \neq 0$,
 d'où $x \neq 3$ et $x \neq -2$.

Donc l'ensemble de départ (le domaine) de la fonction est $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3 \text{ et } x \neq -2\}$.

Solution (3, b) (5 points):

On a $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$, d'où

$x = 3$ est une asymptote verticale.

Similairement, $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = +\infty$ impliquent que $x = -2$ est une asymptote verticale.

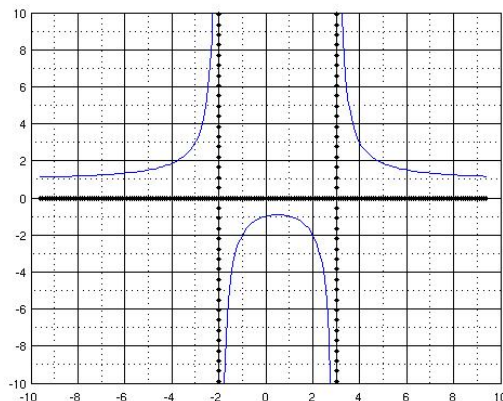
Solution (3, c) (5 points):

Pour trouver les points de maximum local et de minimum local, posons

$$f'(x) = \frac{(2x - 1)(x^2 - x - 6) - (x^2 - x + 6)(2x - 1)}{(x^2 - x - 6)^2} = \frac{-24x + 12}{(x^2 - x - 6)^2} = 0,$$

on obtient $x = \frac{1}{2}$. Quand $x > \frac{1}{2}$, $f'(x) < 0$. Quand $x < \frac{1}{2}$, $f'(x) > 0$. Donc le point de maximum local est $(\frac{1}{2}, -\frac{23}{25})$

Le graphe de la fonction: $f(x) = \frac{x^2-x+6}{x^2-x-6}$



Problème 4: (10 points) Un fermier a 240 mètres de clôtures avec lesquels il envisage de faire une enceinte rectangulaire de longueur L et de largeur w pour les vaches. L'enceinte doit être divisée en 3 parties rectangulaires G, H et I par deux clôtures parallèles à l'un des côtés (le côté de longueur w). La partie rectangulaire G, la plus petite, est de longueur l et de largeur w , la partie H, un peu plus grande, est de longueur $2l$ et de largeur w et la partie I, la plus grande, est de longueur $3l$ et de largeur w . La longueur des clôtures devrait se composer de la longueur du périmètre de l'enceinte et de la longueur des deux clôtures parallèles à l'un des côtés. Trouver les dimensions L , l et w qui produisent l'enceinte ayant une superficie maximale.

Solution (4) (10 points): Soit A la superficie de l'enceinte, P le périmètre de l'enceinte et $C = P + 2w$ la longueur de la clôture. Soient $3l$, $2l$ et l les longueurs des parties I, H et G, respectivement. Soit w la largeur de l'enceinte. D'où la superficie de l'enceinte A :

$$A = 6lw$$

avec le périmètre

$$P = (6l + w)2 = 12l + 2w,$$

la longueur de la clôture C peut se calculer:

$$C = P + 2w = (6l + w)2 + 2w = 2L + 4w = 12l + 4w = 240.$$

De $12l + 4w = 240$, on obtient $w = \frac{1}{4}(240 - 12l) = 60 - 3l$. Alors

$$A(l) = 6l(60 - 3l) = 360l - 18l^2.$$

(ou de $12l + 4w = 240$, on obtient $l = \frac{240-4w}{12} = 20 - \frac{w}{3}$. Alors $A(w) = 120w - 2w^2$, d'où $A(w)' = 120 - 4w = 0$ et $w = 30$)

Pour avoir $A(l) > 0$, l'ensemble de départ de $A(l)$ est $0 < l < 20$. $A'(l) = 360 - 36l$. Posons $A'(l) = 0$, alors le nombre critique de $A'(l)$ est $l = \frac{360}{36} = 10$. On peut vérifier que $A'(l) > 0$ quand $0 < l < 10$ et $A'(l) < 0$ quand $10 < l < 20$. D'où $A(l)$ augmente quand $0 < l < 10$ et $A(l)$ diminue quand $10 < l < 20$. D'où $A(l)$ a une valeur maximale quand $l = 10$ mètres et $w = 60 - 3l = 30$. Donc, pour avoir la superficie maximale de l'enceinte, la longueur L de l'enceinte devrait être $L = 6l = 60$ mètres et la largeur de l'enceinte devrait être $w = 30$ mètres. Et la superficie maximale de l'enceinte est 1800 m^2 .

Problème 5: (15 points) Soit $\vec{u} = [2, 4, -5]$, $\vec{v} = [2, -5, 3]$ et $\vec{w} = [4, -3, 2]$. Soit θ l'angle entre \vec{u} et \vec{v} .

- Trouver le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- Trouver le produit vectoriel $\vec{u} \times \vec{v}$.
- Trouver $\cos \theta$ et $\sin \theta$.
- Trouver la projection $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$ du vecteur \vec{v} sur \vec{u} .
- Trouver le volume du parallélépipède défini par \vec{u} , \vec{v} and \vec{w} .

Solution (5a) (3 points):

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-5) + (-5) \cdot 3 = -31.$$

Solution (5b) (3 points):

$$\vec{u} \times \vec{v} = [4 \cdot 3 - (-5)(-5)]\vec{i} + [(-5)2 - 2 \cdot 3]\vec{j} + [2 \cdot (-5) - 4 \cdot 2]\vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = [-13, -16, -18].$$

Solution (5c) (3 points):

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{-31}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 5^2} \sqrt{2^2 + 5^2 + 3^2}} \\ &= \frac{-31}{\sqrt{45} \sqrt{38}} = \frac{-31}{\sqrt{1710}} \end{aligned}$$

$$\cos \theta = \frac{-31}{\sqrt{1710}} \approx -0.7496587917803454. \quad (\theta \approx 138.56 \text{ degrés})$$

$$\sin \theta = \frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

$$= \frac{\sqrt{(-13)^2 + (-16)^2 + (-18)^2}}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 5^2} \sqrt{2^2 + 5^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{749}}{\sqrt{45} \sqrt{38}}.$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{749}}{\sqrt{1710}} \approx 0.6618245204783764.$$

Solution (5d) (3 points):

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \right) \vec{u}$$

$$= \left(-\frac{31}{45} \right) [2, 4, -5] = \left[-\frac{62}{45}, -\frac{124}{45}, \frac{155}{45} \right].$$

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \left[-\frac{62}{45}, -\frac{124}{45}, \frac{155}{45} \right].$$

Solution (5e) (3 points):

$$|\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})| = |[4, -3, 2] \cdot [-13, -16, -18]| = |-52 + 48 - 36| = 40.$$

le volume du parallélépipède défini par \vec{u} , \vec{v} and $\vec{w}=40$.

Problème 6: (10 points)

(a) Trouver l'équation vectorielle de la droite dans l'espace bidimensionnelle qui est perpendiculaire à $-4x + 5y = 7$ et qui passe par le point $(-3, 4)$.

(b) Trouver l'équation paramétrique de la droite dans l'espace tridimensionnelle qui est parallèle à l'axe des z et qui passe par le point $(7, -2, 4)$.

Solution (6a) (5 points): On sait que $\vec{n} = [-4, 5]$ est un vecteur normal de la droite $-4x + 5y = 7$. D'où \vec{n} est perpendiculaire à $-4x + 5y = 7$ et \vec{n} est un vecteur directeur de la droite qu'on veut. L'équation vectorielle de la droite est

$$[x, y] = [-3, 4] + t[-4, 5],$$

où $t \in \mathbb{R}$ est un scalaire.

Solution (6b) (5 points): Le vecteur $[0, 0, 1]$ est parallèle à l'axe des z , d'où ce vecteur est un vecteur directeur de la droite qu'on veut. L'équation paramétrique de la droite est

$$\begin{aligned}x &= 7 + 0t \\y &= -2 + 0t \\z &= 4 + 1t,\end{aligned}$$

où $t \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

Problème 7: (15 points)

(a) Déterminer l'équation paramétrique et vectorielle

(a.1) du plan dont l'équation est

$$x + 2y + z = 0 \quad (0.1)$$

(a.2) de la droite (D) déterminée par le système de deux équations

$$x + 2y + z = 0 \quad (0.2)$$

$$x + y + 2z - 1 = 0 \quad (0.3)$$

(b)

(b.1) Déterminer le point d'intersection P de la droite (D) trouvée à la question (a.2) et le plan

$$y + z + 1 = 0 \quad (0.4)$$

(b.2) Est-ce que les coordonnées du point P forment une solution du système de trois équations (0.2),(0.3) et (0.4) ?

Solution Problème 7a.1 (4 points):

On introduit deux paramètres en posant $y = s$ et $z = t$, alors on obtient $x = -2s - t$ par l'équation (0.1).

D'où

l'équation paramétrique du plan est

$$x = -t - 2s$$

$$y = s$$

$$z = t.$$

et

l'équation vectorielle du plan est $[x, y, z] = t[-1, 0, 1] + s[-2, 1, 0]$.

Solution Problème 7a.2 (4 points):

On introduit un paramètre en posant $z = t$, alors le système de deux équations (0.2) et (0.3) à deux inconnus x et y devient

$$x + 2y = -t \quad (0.5)$$

$$x + y = -2t + 1 \quad (0.6)$$

Ce système admet une solution unique x, y en fonction de t puisque les deux vecteurs normaux $[1, 2]$ et $[1, 1]$ ne sont pas parallèles.

Pour obtenir x et y , calculons éq. (0.5) – éq. (0.6), on obtient

$$y = t - 1$$

Par l'équation (0.2), $x = -2y - z = -2(t - 1) - t = -3t + 2$.

D'où l'équation paramétrique de la droite est

$$x = -3t + 2$$

$$y = t - 1$$

$$z = t.$$

L'équation vectorielle de la droite est $[x, y, z] = [2, -1, 0] + t[-3, 1, 1]$.

Solution Problème 7b.1 (4 points):

Soit P le point d'intersection de la droite (D) et le plan déterminé par l'équation (0.4). Les coordonnées de P doivent donc vérifier l'équation (0.4):

$(t - 1) + t + 1 = 0$ ou $t = 0$. D'où l'équation vectorielle de la droite avec $t = 0$ donne les coordonnées de P.

Les coordonnées de P sont donc $(2, -1, 0)$.

Solution Problème 7b.2 (3 points):

Les coordonnées de P vérifient les trois équations:

$$2 + 2(-1) + 0 = 0 \quad \text{équation (0.2)}$$

$$2 + (-1) - 1 = 0 \quad \text{équation (0.3)}$$

$$(-1) + 1 = 0 \quad \text{équation (0.4)}$$

Elles forment donc une solution du système de trois équations (0.2),(0.3) et (0.4).

Problème 8: (10 points)

Indiquer si l'énoncé est vrai ou faux. Justifier votre réponse.

(a) Si $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Solution (8a) (2 points): Faux. Si $\vec{u} = \vec{v} \neq \vec{0}$, alors $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$, mais $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$.

(b) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u}$.

Solution (8b) (2 points): Faux. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$.

(c) $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$.

Solution (8c) (3 points): Vrai. $\vec{u} \times \vec{v}$ est perpendiculaire à \vec{u} , d'où $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$.

(d) Dans l'espace tridimensionnel, un système de deux plans ne peut pas avoir exactement une solution.

Solution (8d) (3 points): Vrai. Dans l'espace tridimensionnelle, un système de deux plans peut avoir trois situations différentes suivantes:

- il a, comme solution, une droite (une infinité de solutions) (lorsque l'intersection de deux plans est une droite) ou
- il a, comme solution, tout un plan (une infinité de solutions) (lorsque les deux plans coïncident) ou
- il n'a pas de solution (lorsque les deux plans sont parallèles et distincts)