Université d'Ottawa
Départment de Mathématique et Statistique

MAT 1702A : Méthodes mathématiques II
Professeur : Abdellah Sebbar

Examen Partiel 1
6 février 2015

Nom_________________________ Prénom _______________________

d'étudiant _______________________ Siège # _______________________

Instructions :

(a) Vous avez 80 minutes minutes pour compléter cet examen.

(b) Ecrivez votre numéro d'étudiant sur chaque feuille dans l'espace correspondant.

(c) Montrez les détails de votre travail et justifiez vos réponses pour avoir des notes complètes.

(d) Tout le travail qui va être considéré pour la correction devrait être rédigé dans l'espace prévu. Le verso des pages est pour le brouillon. Si vous trouvez que vous avez besoin d'espace supplémentaire afin de répondre à une question particulière, vous devez continuer sur le verso de la page et indiquer cela **clairement**.

(e) L'utilisation de documents (notes de cours, livres, brouillon, etc), de calculatrice, de téléphones cellulaires ou de tout autre appareil électronique est **interdite**.

(f) Il est recommendé d'écrire en stylo et non en crayon.

(g) La dernière page de l'examen peut être utilisée comme brouillon.

Bonne chance !

SVP ne pas écrire dans le tableau ci-dessous.

Question	1	2	3	4	5	6	Total
Maximum	4	4	3	5	3	3	22
Note							

1. [**4 points**] Déterminer si le système linéaire suivant est compatible ou incompatible. (Si le système est compatible, vous n'avez pas besoin de trouver sa solution générale).

$$\begin{cases} x_2 + 4x_4 + x_5 &= 5 + 2x_1 + x_3 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 &= 2x_1 + 6 \\ 2x_1 - 5x_3 &= 2x_4 + 5x_5 - 7 + x_2 \end{cases}$$

Solution: Le système linéaire s'écrit comme :

$$\begin{cases} -2x_1 & +x_2 & -x_3 & +4x_4 & +x_5 & = & 5 \\ -2x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +3x_5 & = & 6 \\ 2x_1 & -x_2 & -5x_3 & -2x_4 & -5x_5 & = & -7 \end{cases}$$

On cherche la forme echelonnée de la matrice augmentée :

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 4 & 1 & | & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & 3 & | & 6 \\ 2 & -1 & -5 & -2 & -5 & | & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_1+L_2\to L_2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 4 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & | & 1 \\ 2 & -1 & -5 & -2 & -5 & | & -7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1+L_3\to L_3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 4 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & -4 & | & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2L_2+L_3\to L_3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 4 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Puisque la colonne de droite n'est pas une colonne pivot, le système est compatible.

2. (a) [**3 points**] Trouver la solution générale de l'équation vectroielle suivante. Ecrivez votre réponse sous forme paramétrique.

$$x_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) [**1 point**] Les valeurs

$$x_1 = 25, \; x_2 = 5, \; \text{and } x_3 = -30$$

forment une solution du système linéaire

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & 5 \\ 3 & -6 & -6 \\ 1 & -2 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -195 \\ 225 \\ 65 \end{bmatrix}$$

Sans utiliser de réduction, trouver la solution générale du système linéaire ci-dessus. Ecrivez votre réponse sous forme paramétrique.

Indication. Noter que la matrice des coefficients de la matrice du système dans la partie (b) est la même que celle du système dans la partie (a).

Solution: (a) On réduit la matrice augmentée.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & 5 & 0 \\ 3 & -6 & -6 & 0 \\ 1 & -2 & -\frac{5}{3} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{3}L_1 + L_3 \to L_3]{L_1 + L_2 \to L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-L_2 \to L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-5L_2 + L_1 \to L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}L_1 \to L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Le système linéaire correspondant à la forme réduit est :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & -2x_2 & & = 0 \\ & & x_3 & = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2x_2 \\ x_2 = \text{free} \\ x_3 = 0 \end{array} \right.$$

La solution en forme paramétrique est :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) On a :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \\ -30 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Calculer.

(a) [**1 point**] $3\begin{bmatrix}-1\\3\\2\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}2\\0\\4\end{bmatrix}$

Solution: $\begin{bmatrix}-7\\9\\-2\end{bmatrix}$

(b) [**2 points**] $\begin{bmatrix}-2 & -4 & 2\\1 & 0 & -3\\-1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix}$

Solution: $\begin{bmatrix}12\\-4\\0\end{bmatrix}$

4. (a) [**3 points**] Déterminer la valeur du paramètre t tel que le système linéaire suivant admet une infinité de solutions.

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & -3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & -3x_3 & = & -3 \\ x_1 & -x_2 & +tx_3 & = & 1 \end{cases}$$

Solution: On réduit la matrice augmentée :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & | & 1 \\ 2 & -1 & -3 & | & -3 \\ 1 & -1 & t & | & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\;]{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & | & -5 \\ 0 & 0 & t+3 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Om veut que le système soit compatible et qu'il y ait au moins une variable libre. Ceci est possible si $t = -3$.

(b) [**2 points**] Ecrire la solution générale du système linéaire corresponadnt à la valeur de t que vous avez trouvé dans (a).

Solution: Pour $t = -3$ on réduit la matrice augmentée :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2+L_1\to L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -4 \\ 0 & 1 & 3 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Le système linéaire correspondant est :

$$\begin{cases} x_1 & & & = & -4 \\ & x_2 & +3x_3 & = & -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & = -4 \\ x_2 & = -3x_3 - 5 \\ x_3 & = \text{free} \end{cases}$$

5. [**3 points**] On considère les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \ \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Déterminer si $\vec{u}$ est dans $\mathrm{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

Solution: On réduit la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & -4 & 2 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}L_1 + L_4 \to L_4]{\substack{L_1 + L_2 \to L_2 \\ -2L_2 + L_3 \to L_3}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Puisque la dérnière colonne n'est pas une colonne pivot, on a $\mathbf{u}$ appartient à $\in \mathrm{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

6. [**3 points**] Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie or fausse. Vous recevez 1 point pour toute réponse correcte et vous perdez 0,5 point pour chaque réponse incorrecte (sans pour autant recevoir une note négative).

(a) Un système linéaire compatible avec 5 équations et 5 inconnues admet toujours une solution unique.

(b) Si l'espace engendré par deux vecteurs $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ est une droite, alors $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

(c) Si A est une matrice 4×5 et $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$ alors le système homogène$A\vec{x} = \vec{0}$ admet une infinité de solutions.

Solution: (a) Faux
(b) Vrai
(c) Vrai