MAT 2777 (Hiver 2014)
Solutionnaire de l'Examen Partiel (Version A)

1. La fonction masse de probabilité pour X, le nombre d'imperfections par 10 mètres d'un tissu synthétique est donnée par

x	0	1	2	3	4	5
$p_X(x)$	c	c	$2c$	$2c$	c	$c/2$

   (a) Résoudre
$$1 = \sum_{x=0}^{5} p_X(x) = \frac{15\,c}{2}$$
pour c donne $c = 2/15$.

   (b) On veut
$$E[X] = \sum_{x=0}^{5} x\,p_X(x) = \frac{35}{15} = 2,3333$$
et
$$\mathrm{Var}[X] = \left(\sum_{x=0}^{5} x^2\,p_X(x)\right) - \left(\sum_{x=0}^{5} x\,p_X(x)\right)^2 = \frac{88}{45} = 1,9556.$$

   (c)
$$P(|X-2|<1) = P(X=2) = 4/15$$

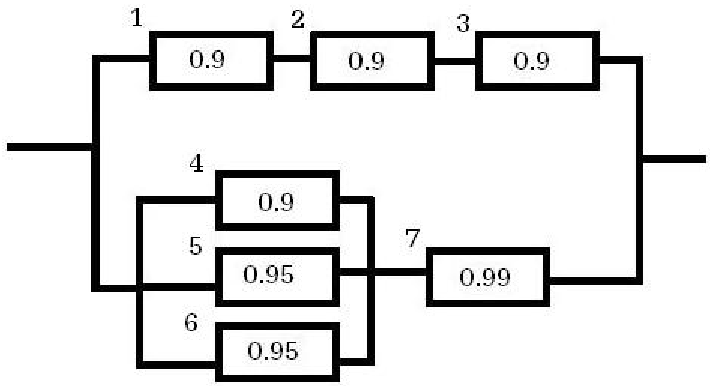
   (d)
$$P(\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma) = P(-0,4635 \le X \le 5,1302) = \sum_{x=0}^{5} p_X(x) = 1$$

2. (a) $N(t)$ suit une loi Poisson avec une moyenne $\lambda = \rho\,t = (5)(0,1\,t) = 0,5\,t$ nid de poules.

   (b) On veut
$$P[N(15) \ge 3] = 1 - \sum_{x=0}^{2} e^{-0,5(15)}\,\frac{[0,5(15)]^x}{x!} = 0,9797.$$

   (c) On veut t tel que
$$0,85 = P[N(t)=0] = e^{-0,5\,t}\,\frac{(0,5\,t)^0}{0!}.$$
Alors, $t = \ln(0,85)/(-0,5) = 0,3250$ kilomètres.

1. On étiquette les composants.



   Définir E_i="composant i fonctionne". On décompose le circuit en sous-circuits.

   Considérons 1, 2 et 3 qui sont assemblés en séries. On étiquette ce composant 8. Alors

$$P(E_8) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1)P(E_2)P(E_3) = (0,9)^3 = 0,729.$$

   Considérons les composants 4, 5 et 6 qui sont assemblés en parallèle. On étiquette ce composant 9. Alors,

$$\begin{aligned} P(E_9) &= P(E_4 \cup E_5 \cup E_6) \\ &= 1 - P(E_4')P(E_5')P(E_6') \\ &= 1 - (0,1)(0,05)(0,05) = 0,99975. \end{aligned}$$

   Considérons les composants 9 et 7 qui sont assemblés en série. On étiquette ce dernier 10. Alors

$$P(E_{10}) = P(E_9 \cap E_7) = P(E_9)P(E_7) = (0,99975)(0,99) = 0,9897525.$$

   Le circuit se compose des composants 10 et 8 en parallèle. Alors, la probabilité que le circuit fonctionne est

$$P(E_8 \cup E_{10}) = 1 - P(E_8')P(E_{10}') = 1 - (1 - 0,729)(1 - 0,9897525) = 0,9972.$$

2. On veut

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(A' \cap B' \cap C') = 1 - (0,5)(0,8)(0,7) = 0,72$$

   La réponse est (D).

3. Puisque

$$59 = E[(X-5)^2] = E[X^2] - 10\,E[X] + 25 \ \text{ et } \ 10 = \mathrm{Var}[X] = E[X^2] - (E[X]^2),$$

alors par soustraction des deux équations, on obtient $49 = -10\,E[X] + (E[X])^2 + 25$, ou l'équation équivalente

$$0 = (E[X])^2 - 10\,E[X] - 24 = (E[X] - 12)(E[X] + 2).$$

Alors, $E[X] = 12$ ou $E[X] = -2$. Mais, $E[X] > 0$, donc $E[X] = 12$. La réponse est (B).

4. Soit C l'événement que la réponse soit correcte et D l'événement que l'étudiant a deviné. On a $P(G) = 0,3$ et $P(G') = 0,7$. En outre, on a $P(C|G) = 0,2$ et $P(C|G') = 1$, puisque l'étudiant va obtenir la bonne réponse si l'étudiant connait la bonne réponse. On veut

$$\begin{aligned} P(G'|C) &= \frac{P(G' \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C|G')P(G')}{P(C|G')P(G') + P(C|G)P(G)} \\ &= \frac{(1)(0,7)}{(1)(0,7) + (0,2)(0,3)} = 0,921 \end{aligned}$$

La bonne réponse est D.

5. Soit X le nombre de circuits rejetés parmi les $n = 20$ circuits. X suit une loi binomiale avec $n = 20$ et $p = 0,2$. On veut

$$P(X \geq 2) = 1 - \left[\binom{20}{0}(0,2)^0(0,8)^{20} + \binom{20}{1}(0,2)^1(0,8)^{19}\right] = 0,931.$$

6. La probabilité que notre échantillon contient exactement une pièce défectueuse est

$$\frac{\binom{5}{1}\binom{45}{4}}{\binom{50}{5}} = 0,3516.$$

7. La probabilité que la durée de vie sera moins que 175 heures est

$$\int_{100}^{175} \frac{100}{x^2}\,dx = 100\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_{100}^{175} = 0,4286$$