MAT 1720A – Examen partiel I – Solutions

Prof.: Patrick Boily
Durée: 1 heure et 20 minutes

4 octobre 2006

Nom de famille	Prénom	Numéro d'étudiant

L'examen contient 9 questions, valant en tout 25 points.

Les premières 5 questions sont des questions à choix multiples. Elle valent 1 point chacune. Vous devez inscrire vos réponses, de façon claire et précise, dans la boîte marquée à cet effet en dessous de ce paragraphe.

1.	2.	3.	4.	5.

Les 4 questions suivantes sont des questions à développement. La valeur de chacune de ces questions est indiquée au début de la question. Une réponse partielle, donnée sans explications, ne recevra qu'une petite partie des points alloués. Vous devez indiquer vos solutions, de façon claire et précise, dans l'espace réservé à cet effet.

Bonne chance ! Good luck !

À fins de correction seulement. N'inscrivez rien dans ces boîtes.	
CM :	9.
6.	
7.	
8.	/25

1. Soit $y = f(x)$ une courbe. Quelle expression représente la pente de la droite tangente à la courbe au point $P(a, f(a))$?

Solution : La bonne réponse est $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$. $\square$

2. Soit

$$f(x) = 4\cos(2x - 6) - 1.$$

Quelle est l'amplitude de f ?

Solution : L'amplitude est 4. $\square$

3. Soit

$$f(x) = 4\cos(2x-6) - 1.$$

Quelle est la période de f ?

Solution : La période est π. $\square$

4. Déterminer toutes les asymptotes vericales et horizontales de

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+x-2}.$$

Solution : Puisque

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x-2}{x-1}, x \neq -2,$$

la fonction n'a qu'une A.V. en $x = 1$. De même, puisque le degré du numérateur est égal au degré du dénominateur, il y a une A.H. en $y = \frac{1}{1} = 1$.
On aurait aussi pu utiliser la définition de l'A.H/ :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4}{x^2+x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1/x^2}{1/x^2} \cdot \frac{x^2-4}{x^2+x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-4/x^2}{1+1/x-2/x^2} = \frac{1-0}{1+0-0} = 1;$$

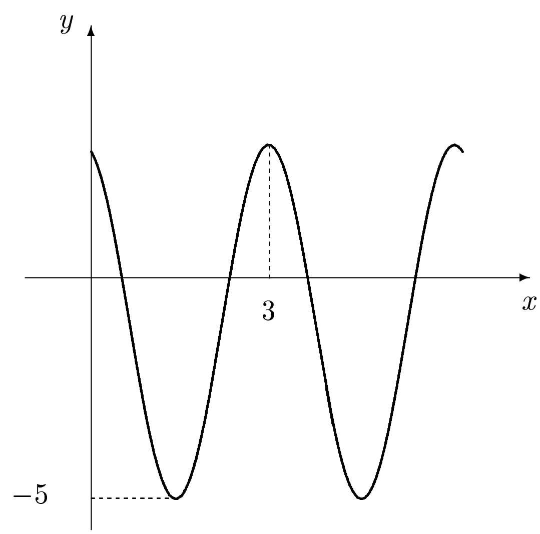
dans les deux cas, l'A.H. se retrouve en $y = 1$. $\square$

5. Soit
$$f(x) = 4\cos(2x-6) - 1.$$
Lequel des graphiques suivants est associé à f ?

Solution : Ré-écrivons

$$f(x) = 4\cos(2x-6) - 1 = A\cos\left(\frac{2\pi}{B}(x-c)\right) + D.$$

Ainsi, $A = 4$, $B = \pi$, $c = 3$ et $D = -1$. C'est-à-dire que nous obtenons le graphique de $f(x)$ à partir de celui de $y = \cos x$ en étirant verticalement par un facteur de 4, en étirant horizontalement par un facteur de $\frac{1}{2}$, en déplaçant verticalement par -1 et en déphasant horizontalement par 3. Ainsi, la courbe recherchée passe de 3 à -5 (en hauteur), et le déphasage $c = 3$ indique que le graphique est obtenu en déplaçant le graphique standard 3 unités vers la droite. Ainsi, puisque le cosinus atteint son maximum lorsque $x = 0$, $\cos(2x-6)$ atteint son maximum lorsque $x = 3$. Le seul graphique qui satisfait à ces conditions est



□

6. [5] (TYPES DE FONCTIONS) Faîtes concorder les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ dont les valeurs se trouvent dans le tableau suivant avec les formules

$$\begin{aligned} y &= mx + b \quad \text{(fonction linéaire)}, \\ y &= P_0 a^x \quad \text{(fonction exponentielle)}, \end{aligned}$$

en supposant que m, b, P_0 et a sont des constantes. Déterminer les valeurs de ces dernières.

x	$k(x)$	$h(x)$
2	0.75	5.7
4	0.188	10.3
6	0.047	14.9
8	0.012	19.5

Solution : Pour éviter la confusion entre les deux versions du test, j'ai renommé les fonctions en question. On remarque que

$$\frac{k(4)}{k(2)} \approx \frac{k(6)}{k(4)} \approx \frac{k(8)}{k(6)} \approx \frac{1}{4}.$$

Ainsi, $k(x)$ est la fonction exponentielle. On remarque également que

$$\frac{h(4) - h(2)}{4 - 2} = \frac{h(6) - h(4)}{6 - 4} = \frac{h(8) - h(6)}{8 - 6} = 2.3$$

Ainsi, $h(x)$ est la fonction linéaire.

Alors $k(x) = P_0 a^x$ et $h(x) = mx + b$. Afin de déterminer les valeurs des constantes (ce qu'une grande partie d'entre vous ont décidé de ne pas faire), il suffit de remplacer les valeurs du tableau dans les fonctions appropriées. Par exemple,

$$\frac{1}{4} = \frac{k(4)}{k(2)} = \frac{P_0 a^4}{P_0 a^2} = a^2 \implies a = \frac{1}{2},$$

d'où $0.75 = k(2) = P_0(\frac{1}{2})^2$ et $P_0 = 3$.

Finalement, nous savons que la pente de $h(x)$ est 2.3 ; nous avons alors $5.7 = h(2) = 2.3(2) + b$, d'où $b = 5.7 - 4.6 = 1.1$. $\square$

7. [5] (EXPONENTIELLE) En 1980, il y avait V_0 millions de véhicules et P_0 millions d'habitants dans un pays quelconque. À partir de 1980 ($t = 0$), le nombre de véhicule augmente de 4% par année et le nombre d'habitants augmente de 1% par année. En quelle année y aura-t-il, en moyenne, un véhicule par personne ?

   Solution : Soit $P(t)$ la population humaine au temps t et $V(t)$ la population automobile au temps t. Ainsi,

$$V(t) = V_0(1.04)^t \quad \text{et} \quad P(t) = P_0(1.01)^t.$$

   Les populations sont égales lorsque $V(t) = P(t)$, c'est-à-dire lorsque

$$\begin{aligned} V_0(1.04)^t &= P_0(1.01)^t \\ \left(\frac{1.04}{1.01}\right)^t &= \frac{P_0}{V_0} \\ t \ln\left(\frac{1.04}{1.01}\right) &= \ln\left(\frac{P_0}{V_0}\right) \\ t &= \frac{\ln P_0 - \ln V_0}{\ln 1.04 - \ln 1.01} \end{aligned}$$

   Dans l'une des versions du test, $V_0 = 180$ et $P_0 = 217$, ce qui donne $t \approx 6.3867$. Dans l'autre version, $V_0 = 160$ et $P_0 = 237$, ce qui donne $t \approx 13.4227$. $\square$

8. [5] (Dérivée numérique) En considérant les valeurs numériques montrées ci-dessous, trouver la meilleure valeur approximative de la dérivée $k'(x)$ et $h'(x)$ pour chacune des valeurs x données.

x	$k(x)$	$h(x)$
0	3.5	6.1
2	4.0	6.8
4	5.8	9.3

Solution : L'approximation à droite donne

$$k'(0) \approx \frac{k(2)-k(0)}{2-0} = \frac{4-3.5}{2} = 0.25$$
$$h'(0) \approx \frac{h(2)-h(0)}{2-0} = \frac{6.8-6.1}{2} = 0.35$$

L'approximation à gauche donne

$$k'(4) \approx \frac{k(4)-k(2)}{4-2} = \frac{5.8-4.9}{2} = 0.9$$
$$h'(4) \approx \frac{h(4)-h(2)}{4-2} = \frac{9.3-6.8}{2} = 1.25$$

et l'approximation moyenne donne

$$k'(2) \approx \frac{k(4)-k(0)}{4-0} = \frac{5.8-3.5}{4} = 0.575$$
$$h'(2) \approx \frac{h(4)-h(0)}{4-0} = \frac{9.3-6.1}{4} = 0.8$$

Voilà qui est fait. □

9. [5] (Esquisse de fonction) Tracer le graphique d'une fonction continue possédant les propriétés suivantes :

(Version A)

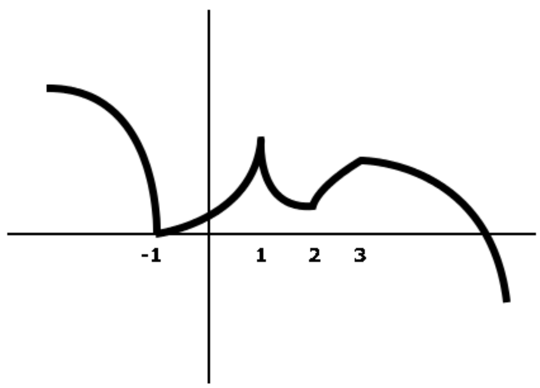
x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < 2$	$x > 3$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$

(Version B)

x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < 2$	$x > 3$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$-$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$

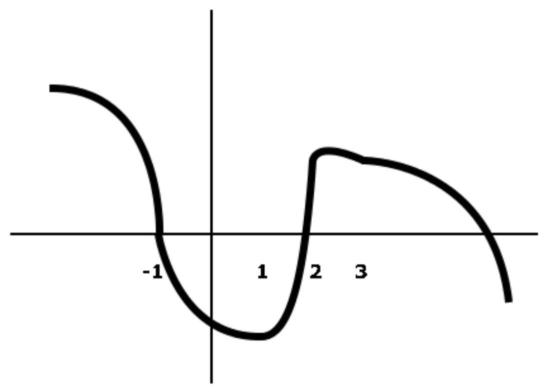
Solution : (Version A)
- lorsque $x < -1$, $f \searrow$ et $\frown$;
- lorsque $-1 < x < 1$, $f \nearrow$ et $\smile$;
- lorsque $1 < x < 2$, $f \searrow$ et $\smile$;
- lorsque $2 < x < 3$, f se comporte comme elle l'entend, et
- lorsque $x > 3$, $f \searrow$ et $\frown$.

Le graphique pourrait ressembler à celui qui suit.



(Version B)
- lorsque $x < -1$, $f \searrow$ et $\frown$;
- lorsque $-1 < x < 1$, $f \searrow$ et $\smile$;
- lorsque $1 < x < 2$, $f \nearrow$ et $\smile$;
- lorsque $2 < x < 3$, f se comporte comme elle l'entend, et
- lorsque $x > 3$, $f \searrow$ et $\frown$.

Le graphique pourrait ressembler à celui qui se retrouve sur la page suivante.


-1
1
2
3

(Feuille supplémentaire pour calculs et brouillons)