MAT1730 B Devoir1 à remettre le 24 Septembre 2015
(À remettre dans les casiers du cours à l'entrée du département des mathématiques)

10/10

Nom :..........................

Numéro d'étudiant(e) :...

Exercice 1 : La surface d'un lac se rétrécie de 10% chaque semaine durant l'été.

(a) Écrire le SDD décrivant la surface du lac x_t à la semaine t.

$$\boxed{x_{t+1} = 0{,}90 x_t}$$

5/5

(b) Quand est ce que la surface du lac sera réduite de moitié ?

$x_{t+1} = 0{,}90\, x_t \Rightarrow x_t = 0{,}90^t x_0$

$t = ? \rightarrow x_t \leq x_0/2$

$0{,}90^t \cancel{x_0} = \dfrac{\cancel{x_0}}{2}$ inconnu

$0{,}90^t = 2^{-1}$

$t \ln(0{,}90) = -\ln(2)$

$t = \dfrac{-\ln(2)}{\ln(0{,}90)} = 6.58$ semaines $\boxed{\simeq 7 \text{ semaines}}$

(c) Supposons que la surface initiale du lac est de 10 km^2. Quand est ce que la surface du lac sera de 7 km^2?

$x_0 = 10\ Km^2$

$x_t = 7\ Km^2$

$x_t = 0{,}90^t x_0$

$7 = 0{,}90^t (10)$ $\qquad \ln 7/10 = t \ln(0{,}90)$

$\dfrac{7}{10} = 0{,}90^t$

$t = \log_{0,90}\left(\dfrac{7}{10}\right) = 3{,}38$ semaines $\boxed{\simeq 4 \text{ Semaines}}$

Exercice 2 : Une population des bactéries croit à un taux de 20% par jour. La population initiale occupe un volume de 1 cm^3.

(a) Écrire le SDD donnant le volume x_t occupé par cette population des bactéries le jour t.

$$x_{t+1} = 1,2x_t$$

(b) À quel moment le volume occupé par cette population va atteindre 1,8 cm^3?

$x_t = 1,8\ cm^3$

$x_t = 1,2^t x_0$

$1,8 = 1,2^t(1)$

$1,8 = 1,2^t$

$\ln(1,8) = \ln(1,2^t)$

$\ln(1,8) = t\ln(1,2)$

$t = \dfrac{\ln(1,8)}{\ln(1,2)} = 3,22 \text{ jours} \simeq \boxed{4 \text{ jours}}$

(c) Combien du temps cela prendra pour que le volume double ?

$2 = 1,2^t(1)$

$2 = 1,2^t$

$\ln(2) = \ln(1,2^t)$

$\ln 2 = t\ln(1,2)$

$t = \dfrac{\ln(2)}{\ln(1,2)} = 3,80 \text{ jours} \boxed{\cancel{\simeq}\ 4 \text{ jours}}$

(d) Le conteneur dans lequel cette population se développe est à moitié plein après 10 jours. Quand est ce que ce conteneur sera plein ? Quel est le volume de ce conteneur ?

$x_{10} = 1,2^{10}(1) = 6,1917\ cm^3$

$x_t = 1,2^t x_0$ $\quad V = 6,1917 \times 2 = 12,38\ cm^3$

$12.38 = 1,2^t(1)$

$\ln 12.38 = \ln(1,2^t)$

$\ln 12.38 = t\ln(1,2)$

$t = \dfrac{\ln 12,38}{\ln 1,2} = 13,8 \text{ jours} \simeq \boxed{14 \text{ jours}}$

Exercice 3 : La taille de la population d'un certain type d'oiseaux d'une île dépend du taux d'accroissement naturel de cette population et de la migration entre cette île et le continent. Un système dynamique discret a été proposé pour modéliser la taille de cette population sous la forme suivante :

$x_{n+1} = 0{,}85x_n + 75 \quad pour \quad n = 0,1,2,....$ Où x_n = la taille de cette population après n années.

(a) si $x_0 = 200$, alors : $x_1 =$ 245 , $x_2 =$ 283,25 , $x_3 =$ 315,76

$x_1 = 0{,}85(200)+75$ $\quad - x_2 = 0{,}85(245)+75$ $\quad - x_3 = 0{,}85(283{,}25)+75$

$\boxed{x_1 = 245}$ $\quad \boxed{x_2 = 283{,}25}$ $\quad \boxed{x_3 = 315{,}76}$

(b) Déterminer la fonction génératrice de ce système, $f(x) =$

$f(x) = 0{,}85x + 75$

(c) Déterminer le point d'équilibre de ce système, $x^* =$ 500

p est tels que $f(p) = p \Rightarrow p = 0{,}85\,p + 75 \Rightarrow 0{,}15p = 75 \Rightarrow p = 500$

(d) Déterminer l'équation de la solution générale de ce système dynamique quand $x_0 = 200$. $x_n =$

$\begin{cases} x_0 = 200 \\ \alpha = 0{,}85 \\ p = 500 \end{cases}$

$x_n = \alpha^n [x_0 - p] + p$

$x_n = (0{,}85)^n [200 - 500] + 500$

$x_n = (0{,}85)^n (-300) + 500$

(e) Tracer l'orbite de ce système dynamique lorsque $x_0 = 200$, (4 points sont suffisants).

n	x
0	$x_0 = 200$
1	$x_1 = 245$
2	$x_2 = 283{,}25$
3	$x_3 = 315{,}76$
4	$x_4 = 343{,}396$