**MAT 2784B- Hiver 2015-Devoir #7**
**A titre de pratique-n'est pas à remettre**

Nom ______________________

Prénom Solution

Numéro d'étudiant ______________________

- **Veuillez imprimer le devoir et écrire vos solutions dans l'espace donné.**
- Vous pouvez utiliser le verso des pages ou les pages supplémentaires si nécessaire mais assurez-vous de l'indiquer clairement.
- Il y a 4 questions dans ce devoir.
- Vous devez répondre à toutes les questions.
- Veuillez rédiger vos réponses de manière lisible et logique.
- Vous pouvez soumettre ce devoir **au plus tard à 14h00** dans le casier "MAT2784A" au rez-de-chaussée du département des mathématiques (KED).

**Question 1 [12 points]** Trouver la **transformée de Laplace** de chacune des fonctions suivantes.

1. $k(t) = e^{-t}\,(2\cos(3t) - 3\sin(3t))$
2. $f(t) = t^2 e^{-2t}\cos(t)$
3. $g(t) = u(t-1)(t^2+3t-2)$
4. $h(t) = u(t-\pi)(\cos(3t) - sin(3t))$

5.) $K(t) = t e^{-4t} u(t-1)$

Solution (1) $\mathcal{L}\{k(t)\} = 2\mathcal{L}\{e^{-t}\cos(3t)\} - 3\mathcal{L}\{e^{-t}\sin(3t)\}$

$$= 2\frac{s+1}{(s+1)^2+9} - 3\frac{3}{(s+1)^2+9} = \frac{2s+2}{s^2+2s+10} - \frac{9}{s^2+2s+10} = \frac{2s-7}{s^2+2s+10}$$

(premier Théorème de décalage).

(2) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t^2e^{-2t}\cos(t)\} = (-1)^2\dfrac{d^2F(s)}{ds^2}$ où $F(s) = \mathcal{L}\{e^{-2t}\cos t\}$

$$= \frac{s+2}{(s+2)^2+1} \text{ (premier Théorème de décalage) } = \frac{s+2}{s^2+4s+5}$$

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{1.(s^2+4s+5)-(2s+4)(s+2)}{(s^2+4s+5)^2} = \frac{-s^2-4s-3}{(s^2+4s+5)^2}$$

$$\frac{d^2F(s)}{ds^2} = \frac{(-2s-4)(s^2+4s+5)^2 - 2(s^2+4s+5)(2s+4)(-s^2-4s-3)}{(s^2+4s+5)^4}$$

$$= \frac{(2s+4)(s^2+4s+5)\left[-s^2-4s-5+2s^2+8s+6\right]}{(s^2+4s+5)^4}$$

$$= \frac{(2s+4)(s^2+4s+1)}{(s^2+4s+5)^3} = \frac{2(s+2)(s^2+4s+1)}{(s^2+4s+5)^3}$$

D'où $\mathcal{L}\{f(t)\} = (-1)^2\dfrac{d^2F(s)}{ds^2} = \dfrac{2(s+2)(s^2+4s+1)}{(s^2+4s+5)^3}$

(3) $\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{u(t-1)(t^2+3t-2)\}$

$f(t-1) = t^2+3t-2 \Rightarrow f(t) = (t+1)^2+3(t+1)-2 = t^2+5t+2$. Par le 2ème Théorème de décalage, on a :

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-s}\,\mathcal{L}\{t^2+5t+2\} = e^{-s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{5}{s^2}+\frac{2}{s}\right) = \frac{(2s^2+5s+2)e^{-s}}{s^3}$$

(4) $\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{u(t-\pi)(\cos(3t)-\sin(3t))\}$

$f(t-\pi) = \cos(3t)-\sin(3t) \Rightarrow f(t) = \cos(3(t+\pi)) - \sin(3(t+\pi)) =$
$\cos(3t+3\pi) - \sin(3t+3\pi) = \cos(3t+\pi) - \sin(3t+\pi) = -\cos(3t) + \sin(3t)$

(Car $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$ et $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$). Donc

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = e^{-\pi s}\,\mathcal{L}\{-\cos(3t)+\sin(3t)\} = e^{-\pi s}\left[\frac{-s}{s^2+9}+\frac{3}{s^2+9}\right]$$

$$= -\frac{e^{-\pi s}(s-3)}{s^2+9}$$

(5) Par le premier Théorème de décalage :

$$\mathcal{L}\{te^{-4t}u(t-1)\} = e^{-s}\,\mathcal{L}\{(t+1)e^{-4(t+1)}\} = e^{-s}\,\mathcal{L}\{(t+1)e^{-4}.e^{-4t}\}$$
$$e^{-s-4}\,\mathcal{L}\{te^{-4t}+e^{-4t}\} = e^{-(s+4)}\left(\frac{1}{(s+4)^2}+\frac{1}{s+4}\right) = \frac{(s+5)e^{-(s+4)}}{(s+4)^2}$$

**Question 2 [12 points]** Trouver la **transformée de Laplace inverse** de chacune des fonctions suivantes:

1. $K(s) = \frac{1}{s^2-6s+8}$
2. $F(s) = e^{-3s}\frac{-s-10}{s^2-s-12}$
3. $G(s) = \frac{4s-4}{(s^2-2s+5)^2}$
4. $H(s) = \frac{e^{-s}}{(s+1)(s^2+4)}$

Solution 1) $K(s) = \frac{1}{s^2-6s+8} = \frac{1}{(s-2)(s-4)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-4} = \frac{(A+B)s-4A-2B}{(s-2)(s-4)}$

$\Rightarrow$ $A+B=0$, $-4A-2B=1 \Rightarrow -4A-2(-A)=1 \Rightarrow -2A=1 \Rightarrow A=-1/2$ et

$B=1/2$. D'où $\frac{1}{s^2-6s+8} = \frac{-1/2}{s-2} + \frac{1/2}{s-4}$ et donc

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-6s+8}\right\} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} = -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{4t}.$

2) $\frac{-s-10}{s^2-s-12} = \frac{-s-10}{(s+3)(s-4)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-4} = \frac{(A+B)s-4A+3B}{s^2-s-12} \Rightarrow \begin{cases} A+B=-1 \\ -4A+3B=-10 \end{cases}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & -10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -14 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow A=1, B=-2$

Alors $\frac{-s-10}{s^2-s-12} = \frac{1}{s+3} - \frac{2}{s-4} \Rightarrow e^{-3s}\frac{-s-10}{s^2-4s-12} = \frac{e^{-3s}}{s+3} - \frac{2e^{-3s}}{s-4} \Rightarrow$

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s+3}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s-4}\right\} = u(t-3)e^{-3(t-3)} - 2u(t-3)e^{4(t-3)}$

$= u(t-3)\left[e^{(-3t+9)} - 2e^{(4t-12)}\right]$

3) Soit $F(s) = \frac{1}{s^2-2s+5} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{(s-1)^2+4} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}e^t\sin(2t)\right\}$

par le premier Théorème de décalage. De plus, on a que

$$\frac{dF(s)}{ds} = -\frac{2s-2}{(s^2-2s+5)^2} \Rightarrow \frac{4s-4}{(s^2-2s+5)^2} = 2\,(-1)^1 \frac{dF(s)}{ds} \Rightarrow$$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s-4}{(s^2-2s+5)^2}\right\} = 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{(-1)^1 \frac{d}{ds}F(s)\right\} = 2\,\frac{1}{2}t\,e^t \sin(2t)$ (por la regla de multiplicación por $t^n$) $= t e^t \sin(2t)$

(4) $$\frac{1}{(s+1)(s^2+4)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+4} = \frac{(A+B)s^2+(B+C)s+4A+C}{(s+1)(s^2+4)} \Rightarrow$$

$A+B=0$, $B+C=0$, $4A+C=1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 \end{array}\right] \Rightarrow A = \frac{1}{5},\ B = -\frac{1}{5},\ C = 1/5$$

$$H(s) = e^{-s}\left[\frac{1}{5}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{5}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{5}\frac{1}{s^2+4}\right] \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} =$$

$$\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s+1}\right\} - \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\frac{1}{s^2+4}\right\}$$

$$= \frac{1}{5}u(t-1)\,e^{-(t-1)} - \frac{1}{5}u(t-1)\cos(t-1) + \frac{1}{5}u(t-1)\sin(2(t-1)).$$

**Question 3 [15 points]** Utiliser la **transformée de Laplace** pour résoudre chacun des PVI suivants:

1. $y'' + y' - 2y = -4e^{t}$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -9$
2. $y'' - 3y' + 2y = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < t < 3 \\ 2e^t & \text{pour } t > 3 \end{cases}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$
3. $y'' - 9y = \delta(t - \pi)$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$

Solution 1) Soit $Y = \mathcal{L}\{y\}$. Appliquons $\mathcal{L}$ à l'ÉD:

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = -4\mathcal{L}\{e^{t}\} \Rightarrow$$

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + sY - y(0) - 2Y = -\frac{4}{s-1} \Rightarrow (s^2+s-2)Y = 4s - 5 - \frac{4}{s-1}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{4s-5}{(s-1)(s+2)} - \frac{4}{(s-1)^2(s+2)}$$

$$\frac{4s-5}{(s-1)(s+2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} = \frac{(A+B)s + 2A - B}{(s-1)(s+2)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=4 \\ 2A-B=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = -\frac{1}{3} \\ B = \frac{13}{3} \end{matrix}$$

$$\frac{4s-5}{(s-1)(s+2)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{s-1} + \frac{13}{3}\frac{1}{s+2}$$

$$\frac{4}{(s-1)^2(s+2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+2} = \frac{A(s-1)(s+2) + B(s+2) + C(s-1)^2}{(s-1)^2(s+2)}$$

$$= \frac{As^2 + As - 2A + Bs + 2B + Cs^2 - 2Cs + C}{(s-1)^2(s+2)} = \frac{(A+C)s^2 + (A+B-2C)s - 2A + 2B + C}{(s-1)^2(s+2)}$$

$$\Rightarrow A+C=0, \quad A+B-2C=0, \quad -2A+2B+C=4$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4/9 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4/9 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 4/9 \end{array}\right] \Rightarrow A = -\frac{4}{9},\ B = \frac{4}{3},\ C = \frac{4}{9} \text{ et alors}$$

$$\frac{4}{(s-1)^2(s+2)} = -\frac{4}{9}\frac{1}{s-1} + \frac{4}{3}\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{4}{9}\frac{1}{s+2}.$$ Par suite :

$$Y = \frac{4s-5}{(s-1)(s+2)} - \frac{4}{(s-1)^2(s+2)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{s-1} + \frac{13}{3}\frac{1}{s+2} + \frac{4}{9}\frac{1}{s-1} - \frac{4}{3}\frac{1}{(s-1)^2} - \frac{4}{9}\frac{1}{s+2}$$

$$Y = \frac{1}{9}\frac{1}{s-1} + \frac{35}{9}\frac{1}{s+2} - \frac{4}{3}\frac{1}{(s-1)^2}$$ . Donc la solution du PVI est

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = \frac{1}{9}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{35}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - \frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{9}e^{t} + \frac{35}{9}e^{-2t} - \frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{(-1)'\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-1}\right)\right\} = \boxed{\frac{1}{9}e^{t} + \frac{35}{9}e^{-2t} - \frac{4}{3}te^{t}}$$

(2) On commence par convertir le côté droit de l'ÉD à une forme qu'on peut travailler avec. Dans ce cas, il est facile de voir que $r(t) = 2e^{t}u(t-3)$. Donc :

$y'' - 3y' + 2y = 2e^{t}u(t-3)$. Soit $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Appliquer $\mathcal{L}$ à l'ÉD :

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) - 3[sY - y(0)] + 2Y = 2\mathcal{L}\{u(t-3)e^{t}\} \Rightarrow$$

$$(s^2 - 3s + 2)Y = 3s - 5 + 2\frac{e^{-3s+3}}{s-1} \Rightarrow Y = \frac{3s-5}{(s-1)(s-2)} + \frac{2e^{3}e^{-3s}}{(s-1)^2(s-2)}$$

$$\frac{3s-5}{(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} \Rightarrow A + B = 3 \text{ et } -2A - B = -5 \Rightarrow A = 2,\ B = 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-5}{(s-1)(s-2)}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = 2e^{t} + e^{2t}$$

$$\frac{1}{(s-1)^2(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s-2} = \frac{A(s^2-3s+2) + B(s-2) + C(s^2-2s+1)}{(s-1)^2(s-2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + C = 0 \\ -3A + B - 2C = 0 \\ 2A - 2B + C = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow A = -1,\ B = -1,\ C = 1$$

$$\frac{1}{(s-1)^2(s-2)} = -\frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-2}$$ . D'où

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2e^3 e^{-3s}}{(s-1)^2(s-2)}\right\} = -2e^3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s-1}\right\} - 2e^3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{(s-1)^2}\right\} + 2e^3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s-2}\right\} =$$

$$-2e^3 u(t-3)e^{(t-3)} - 2e^3 u(t-3)\, e^{(t-3)}(t-3) + 2e^3 u(t-3)\, e^{2(t-3)} =$$

$2u(t-3)[e^{2t-3} + 2e^t - te^t]$. Alors, la solution du PVI est

$$\boxed{y(t) = 2e^t + e^{2t} + 2u(t-3)[e^{(2t-3)} + 2e^t - te^t]}$$

3) On applique l'opérateur $\mathcal{L}$ à l'ÉD:

$$s^2Y - s(-1) - 2 - 9Y = e^{-\pi s} \Rightarrow (s^2-9)Y = -s + 2 + e^{-\pi s} \Rightarrow$$

$$Y = \frac{-s+2}{(s-3)(s+3)} + \frac{e^{-\pi s}}{(s-3)(s+3)}$$

$$\frac{-s+2}{(s-3)(s+3)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+3} \Rightarrow A + B = -1,\ 3A - 3B = 2 \Rightarrow 3A - 3(-1-A) = 2$$
$$\Rightarrow A = -1/6 \text{ et } B = -5/6$$

$$\frac{1}{(s-3)(s+3)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+3} \Rightarrow A + B = 0,\ 3A - 3B = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{6},\ B = -\frac{1}{6}$$

Alors $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = -\frac{1}{6}e^{3t} - \frac{5}{6}e^{-3t} + \frac{1}{6}u(t-\pi)[e^{3(t-\pi)} - e^{-3(t-\pi)}]$

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{6}[e^{3t} + 5e^{-3t}] + \frac{1}{6}u(t-\pi)[e^{3t-3\pi} - e^{-3t+3\pi}]}$$

**Question 4 [9 points]** Considérer le PVI suivant:

$$y' = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y\,,\ y(0) = 1$$

Remarquer qu'il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

1. Utiliser la **méthode d'Euler améliorée** avec un pas de $h = 0.25$ pour donner des approximations des valeurs de la fonction $y$ solution du PVI dans l'intervalle [0, 0.75] (arrondir les valeurs à 6 chiffres après la virgule)

2. Utiliser la **méthode de Runge-Kutta d'order 4** avec un pas de $h = 0.25$ pour donner des approximations des valeurs de la fonction $y$ solution du PVI dans l'intervalle [0, 0.75] (arrondir les valeurs à 6 chiffres après la virgule)

3. Résoudre le PVI et donner la solution $y$ explicitement. Donner les valeurs exactes de la fonction $y$ aux points $x = 0$, $x = 0.25$, $x = 0.5$ et $x = 0.75$. Former un tableau pour comparer les approximations trouvées dans les deux parties précédentes avec les valeurs exactes.

<u>Solution</u> $f(x,y) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y$ , $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.25$

1) $x_1 = x_0 + h = 0.25$

$y_1^P = y_0 + h\,f(x_0, y_0) = 1 + 0.25\left(-\frac{2}{3}(0) + \frac{1}{2}(1)\right) = 1.125$

$y_1^C = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0,y_0) + f(x_1, y_1^P)\right] = 1 + 0.125\left[-\frac{2}{3}(0) + \frac{1}{2}(1) - \frac{2}{3}(0.25) + \frac{1}{2}(1.125)\right]$

$= 1.111979$

$(x_1, y_1) = (0.25,\ 1.111979)$

$x_2 = 0.25 + 0.25 = 0.5$

$y_2^P = y_1^C + h\,f(x_1, y_1^C) = 1.111979 + 0.25\left[-\frac{2}{3}(0.25) + \frac{1}{2}(1.111979)\right] = 1.209310$

$y_2^C = y_1^C + \frac{h}{2}\left[f(x_1, y_1^C) + f(x_2, y_2^P)\right] = 1.111979 + \frac{0.25}{2}\left[-\frac{2}{3}(0.25) + \frac{1}{2}(1.111979)\right.$

$\left. - \frac{2}{3}(0.5) + \frac{1}{2}(1.209310)\right]$

$= 1.194560$

$(x_2, y_2) = (0.5,\ 1.194560)$

$x_3 = 0.5 + 0.25 = 0.75$

$y_3^p = y_2^c + h f(x_2, y_2^c) = 1.194560 + 0.25\left[-\frac{2}{3}(0.5) + \frac{1}{2}(1.194560)\right] = 1.260547$

$y_3^c = y_2^c + \frac{h}{2}\left[f(x_2, y_2^c) + f(x_3, y_3^p)\right] = 1.194560 + \frac{0.25}{2}\Big[-\frac{2}{3}(0.5) + \frac{1}{2}(1.194560)$

$-\frac{2}{3}(0.75) + \frac{1}{2}(1.260547)\Big] = 1.243838$

$(x_3, y_3) = (0.75, 1.243838)$

2) $x_1 = x_0 + h = 0.25$

$k_1 = h f(x_0, y_0) = 0.25\left[-\frac{2}{3}(0) + \frac{1}{2}(1)\right] = 0.125$

$k_2 = h f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1) = 0.25 f(0.125, 1.0625) = 0.25\left[-\frac{2}{3}(0.125) + \frac{1}{2}(1.0625)\right]$

$= 0.111979$

$k_3 = h f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2) = 0.25 f(0.125, 1.055990)$

$0.25\left[-\frac{2}{3}(0.125) + \frac{1}{2}(1.055990)\right] = 0.111165$

$k_4 = h f(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.25 f(0.25, 1.111165)$

$0.25\left[-\frac{2}{3}(0.25) + \frac{1}{2}(1.111165)\right] = 0.097223$

$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right] = 1 + \frac{1}{6}\Big[0.125 + 2(0.111979) + 2(0.111165)$

$0.097223\Big] = 1.111419$

Alas $(x_1, y_1) = (0.25, 1.111419)$

$x_2 = x_1 + h = 0.5$

$k_1 = h f(x_1, y_1) = 0.25\left[-\frac{2}{3}(0.25) + \frac{1}{2}(1.111419)\right] = 0.097261$

$k_2 = h f(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_1) = 0.25 f(0.375, 1.160050)$

$= 0.25\left[-\frac{2}{3}(0.375) + \frac{1}{2}(1.160050)\right] = 0.082506$

$k_3 = h f(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_2) = 0.25 f(0.375, 1.152672)$

$= 0.25\left[-\frac{2}{3}(0.375)+\frac{1}{2}(1.152672)\right] = 0.081584$

$k_4 = hf(x_1+h, y_1+k_1) = 0.25 f(0.5, 1.193003) =$

$0.25\left[-\frac{2}{3}(0.5)+\frac{1}{2}(1.193003)\right] = 0.065792$

$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}\left[k_1+2k_2+2k_3+k_4\right] = 1.111419 + \frac{1}{6}\left[0.097261+2(0.082506)+\right.$

$\left.2(0.081584)+0.065792\right] = 1.193291$

Alors $(x_2, y_2) = (0.5, 1.193291)$

$x_3 = x_2 + h = 0{,}75$

$k_1 = hf(x_2, y_2) = 0{,}25\left[-\frac{2}{3}(0{,}5)+\frac{1}{2}(1.193291\right] = 0.065828$

$k_2 = hf(x_2+\frac{1}{2}h, y_2+\frac{1}{2}k_1) = 0{,}25 f(0.625, 1.226205)$

$= 0{,}25\left[-\frac{2}{3}(0.625)+\frac{1}{2}(1.226205)\right] = 0.049109$

$k_3 = hf(x_2+\frac{1}{2}h, y_2+\frac{1}{2}k_2) = 0{,}25 f(0.625, 1.217846) =$

$0.25\left[-\frac{2}{3}(0.625)+\frac{1}{2}(1.217846)\right] = 0.048064$

$k_4 = hf(x_2+h, y_2+k_3) = 0{,}25 f(0{,}75, 1.241355) =$

$0.25\left[-\frac{2}{3}(0{,}75)+\frac{1}{2}(1.241355)\right] = 0.030169$

$y_3 = y_2 + \frac{1}{6}\left[k_1+2k_2+2k_3+k_4\right] = 1.143082 + \frac{1}{6}\left[0.065828+\right.$

$\left.2(0.049109)+2(0.048064)+0.030169\right] = 1{,}241682$

Alors $(x_3, y_3) = (0{,}75, 1.241682)$

3) l'équation différentielle est linéaire d'ordre 1. sa solution est $y(x) = \dfrac{\int e^{\int f(x)dx} \cdot r(x)\,dx + C}{e^{\int f(x)dx}} =$

$$\frac{\int e^{\int -\frac{1}{2}dx} \cdot \left(-\frac{2}{3}x\right) dx + C}{e^{\int -\frac{1}{2}x\,dx}} = \frac{-\frac{2}{3}\int x e^{-\frac{1}{2}x}\,dx + C}{e^{-\frac{1}{2}x}}$$

$u = x$, $v' = e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow u' = 1$, $v = -2e^{-\frac{1}{2}x}$

$\int x e^{-\frac{1}{2}x}\,dx = -2xe^{-\frac{1}{2}x} + 2\int e^{-\frac{1}{2}x}\,dx = -2xe^{-\frac{1}{2}x} - 4e^{-\frac{1}{2}x}$. Donc

$y(x) = e^{\frac{1}{2}x}\left[-\frac{2}{3}\left(-2xe^{-\frac{1}{2}x} - 4e^{-\frac{1}{2}x}\right) + C\right] = -\frac{2}{3}(-2x-4) + Ce^{\frac{1}{2}x}$

$y(x) = \frac{4}{3}(x+2) + Ce^{\frac{1}{2}x}$

$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{8}{3} + C \Rightarrow C = -\frac{5}{3}$. Alors la solution du PVI est $\boxed{y(x) = \frac{4}{3}(x+2) - \frac{5}{3}e^{\frac{1}{2}x}}$.

Le tableau suivant donne les valeurs approximées en 1) et 2) et les valeurs exacts.

| $x$ | Euler Améliorée | Runge-Kutta d'ordre 4 | Valeurs Exacts |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0.25 | 1.111979 | 1.111419 | 1.111419 |
| 0.5 | 1.194560 | 1.193291 | 1.193291 |
| 0.75 | 1.243838 | 1.241682 | 1.241681 |