Introduction à l'Algèbre linéaire (MAT1741 B)
EXAMEN PARTIEL I (Hiver 2015)
Professeur: Joseph Khoury. Durée: 80 minutes

Nom de famille: Solution

Prénom:

Numéro d'étudiant:

Aucune note n'est permise.
Les calculatrices ne sont pas permises.

Cet examen comporte 8 questions et 10 pages. Les questions à choix multiples (1 à 5) valent chacune 2 points sur les 28 points que compte l'examen. Inscrire à l'ENCRE dans les cases ci-dessous les LETTRES correspondant aux réponses à ces questions.

1	2	3	4	5

Les questions 6 à 8 sont à développement et requièrent une réponse détaillée. Prenez soin de bien rédiger votre solution. Vous pouvez utiliser le verso des pages et les pages additionnelles si vous manquez d'espace au recto.

1. Considérer les deux matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Trouver l'entrée à la deuxième ligne et la deuxième colonne de la matrice $A^{-1}\left(B^T\right)$.

A. -2
B. 2
C. 3
D. 0
E. -3
F. Aucune des autres réponses

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

d'entrée à la deuxième ligne et deuxième colonne de $A^{-1}(B^T)$ est alors

$[-1 \quad 2] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{3}$

2. Soit A et B deux matrices carrées de même format $n \times n$ avec $n \geq 2$. Lesquels des énoncés suivants sont **toujours vrais**?
(1) Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.
(2) Si A et B sont symétriques, alors $A+B$ est aussi symétrique.
(3) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ (Rappel: $(A+B)^2$ est la matrice $(A+B)(A+B)$).
(4) Si la matrice A admet une ligne nulle, il en est de même pour la matrice AB.
(5) Si la matrice A admet une ligne nulle, il en est de même pour la matrice BA.

A. (1) seulement
B. (2) et (3)
C. (5) seulement
D. (2) et (4)
E. (2) seulement
F. (1) et (3)

(1) Faux $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(2) Vrai $(A+B)^T = A^T + B^T = A+B$ (car $A = A^T$ et $B = B^T$)

(3) Faux $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + \underbrace{AB+BA}_{\neq 2AB} + B^2$

(4) Vrai Si la ligne nulle de A est la $i^{\text{ème}}$, alors la $i^{\text{ème}}$ ligne de AB est nulle

(5) Faux $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ aucune ligne nulle.

3. Considérer la matrice

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & m\end{bmatrix}.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de m, la matrice est-elle inversible?

A. $m = -1$ **B.** $m = 1$ **C.** $m \neq 0$

D. $m \neq -1$ **E.** $m \neq \pm 1$ **F.** $m \neq 1$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & m\end{bmatrix} \overset{(-1)L_1+L_3}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & m+1\end{bmatrix}$$

La matrice et inversible $\Leftrightarrow rg(A) = 3 \Leftrightarrow m+1 \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{m \neq -1}$

4. Trouver la matrice A qui satisfait:

$$\left(A + 3\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}\right)^T = 2A^T + \begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}.$$

A. $A = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ **B.** $A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

C. Aucune des autres réponses **D.** $A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -4\end{bmatrix}$

E. $A = \begin{bmatrix}0 & -1\\ -2 & 4\end{bmatrix}$ **F.** $A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -4\end{bmatrix}$

$$\left(\left(A + 3\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}\right)^T\right)^T = \left(2A^T + \begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right)^T \Rightarrow A + 3\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix} = 2A + \begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A = 3\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1\\ -2 & 4\end{bmatrix}$$

5. Considérer les trois matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Parmi les énoncés suivants lequel (ou lesquels) est (sont) vrai(s)?

(1) La matrice A est en forme échelonnée mais pas réduite

(2) La matrice B est en forme échelonnée réduite

(3) La matrice C est en forme échelonnée mais pas réduite

(4) La matrice A^TC existe et elle est de format 5×3

(5) La matrice A^TC existe et elle est de format 3×5

(6) La matrice A^TC n'est pas définie

A. (3) et (5) **B.** (3) seulement **C.** (5) seulement

D. (1) et (4) **E.** (1) et (6) **F.** (2) seulement

(1) Vrai

(2) Faux B est sous forme échelonnée pas réduite

(3) Faux C n'est pas sous forme échelonnée

(4) Vrai A est de format 5x3 ⇒ A^T est de format 3x5

$$\underset{5\times\underline{\underline{3}}}{A^T} \quad \underset{\underline{\underline{3}}\times 3}{C}$$

(5) Faux A^TC de format 5x3

(6) Faux A^TC existe

6. **[5 points]** Considérer la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Trouver la forme échelonnée réduite de A.

(b) Donner le rang de A.

(c) La matrice A est-elle inversible?

(a) $$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \underset{\frac{1}{4}L_4 \to L_4}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_1 + L_3 \to L_3}{\overset{-3L_1 + L_2 \to L_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -8 & -17 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{4}L_3 \to L_3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -8 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{(-1)L_3 + L_4 \to L_4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -8 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{8L_3 + L_2 \to L_2}{\overset{-3L_3 + L_1 \to L_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(1)L_2 + L_1 \to L_1}{\sim} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & -7 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & -9 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) $\operatorname{rg}(A) = 3$

(c) A est de format 4×4 dont le rang est 3. Donc A n'est pas inversible.

7. **[5 points]** Considérer la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Utiliser l'Algorithme de Gauss-Jordan pour trouver A^{-1}.

(b) Utiliser la réponse à la partie (a) pour trouver une matrice B qui satisfait

$$\left(B^T + 3I_3 \right)^{-1} = A^T$$

où I_3 est la matrice identité d'ordre 3.

(a)
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{-2L_1+L_3\to L_3}{\overset{(-1)L_1+L_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{(-1)L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{L_2+L_3\to L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{-L_3+L_2\to L_2}{\overset{-2L_3+L_1\to L_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \overset{(-1)L_2+L_1\to L_1}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{-1 \quad -1 \quad 1}_{A^{-1}} \end{array}\right] . \quad \text{D'où } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)
$$\left(B^T + 3I_3 \right)^{-1} = A^T \Rightarrow B^T + 3I_3 = \left(A^T \right)^{-1} = \left(A^{-1} \right)^T$$

$$\Rightarrow B^T = \left(A^{-1} \right)^T - 3I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

8. [**8 points**] Pour chacun des énoncés suivants, déterminer si l'énoncé est **vrai** or **faux**. **Justifier vos réponses.**

(1) Si A est une matrice 3×3 telle que $A^3 - 3A^2 - 2I_3 = 0$, alors A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}\left(A^2 - 3A\right)$.

(2) Si A et B sont deux matrices carrées **inversibles** de même format $n \times n$, alors la matrice $C = \frac{1}{3}A^{-1}B$ est aussi inversible et $C^{-1} = 3AB^{-1}$.

(3) Si A et B sont deux matrices carrées de même format telles que $AB = \mathbf{0}$ (où $\mathbf{0}$ est la matrice nulle), alors $A = \mathbf{0}$ ou $B = \mathbf{0}$.

(4) Si A, B sont deux matrices symétriques de même format, alors $2A + 3B$ est aussi une matrice symétrique.

(1) <u>VRAI</u> $A^3 - 3A^2 - 2I_3 = 0 \Rightarrow A^3 - 3A^2 = 2I_3 \Rightarrow A(A^2 - 3A) = 2I_3$

$\Rightarrow A \cdot \left[\frac{1}{2}(A^2 - 3A)\right] = I_3$. Alors $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 3A)$

(2) <u>Faux</u> $C^{-1} = \left(\frac{1}{3}A^{-1}B\right)^{-1} = 3B^{-1}(A^{-1})^{-1} = 3B^{-1}A$

(3) <u>Faux</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, alors

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $A \neq 0$, $B \neq 0$

(4) <u>VRAI</u> $(2A + 3B)^T = 2A^T + 3B^T = 2A + 3B$ (car $A = A^T$, $B = B^T$)

Donc $2A + 3B$ est symétrique.