

MAT 1730 – Automne 2015 – Devoir 7

À remettre au plus tard le jeudi, 26 novembre, 20h00.

Votre devoir doit être remis à temps et broché sinon il ne sera pas corrigé.

DGD (encercler un seul) 1 (lun 10h)

2 (lun 13h)

3 (mer 11h30)

Nom: _____

No d'étudiant: _____

QUESTION 1. (OPTIONNELLE, NE SERA PAS CORRIGÉE.) Calculer le polynôme de Taylor de degré 2 de $f(x) = \tan(x^2)$ autour du point $a = 0$.

On a $f'(x) = \sec^2(x^2)(2x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}$

et $f''(x) = \frac{2 \cos^2(x^2) - (2x)(2) \cos(x^2)(-\sin(x^2))}{\cos^4(x^2)} (2x)$

d'ici $f(0) = 0$; $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 2$.

La formule de Taylor à l'ordre 2 est

$$T_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

donc pour $a=0$; cela donne

$$T_2(x) = 0 + 0(x-0) + \frac{x^2}{2}(2) = x^2$$

pour x voisin de zéro

Réponse: $T_2(x) =$

x^2

QUESTION 2. Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

(a) Énoncer le théorème de la valeur moyenne.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$
différentiable sur $]a, b[$ alors
il existe au moins un nombre $c \in]a, b[$
tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

(b) Utiliser ce théorème pour montrer qu'il existe un point $c \in [1, 2]$ tel que $f'(c) = -3/4$.

f est continue sur $[1; 2]$; différentiable sur $]1, 2[$
donc il existe au moins un nombre $c \in]1; 2[$ tel que
 $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f'(c)$ or $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ donc cela veut dire
 $\exists c \in]1; 2[$ tel que $\frac{\frac{1}{4} - 1}{1} = -\frac{2}{c^3} \Rightarrow -\frac{3}{4} = -\frac{2}{c^3} \Rightarrow c^3 = \frac{8}{3}$
 $\Rightarrow c = \sqrt[3]{\frac{8}{3}} = 1,3867$

(c) Pour cette fonction, on calcule: $f(1) = f(-1) = 1$. Conséquemment, le théorème de la moyenne nous dit que la fonction f devrait avoir un point critique dans l'intervalle $[-1, 1]$. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ n'est jamais nulle. Pourquoi est-ce que le théorème de la valeur moyenne ne s'applique pas?

Ici ; l'intervalle où on étudie la fonction f est $[-1; 1]$
donc le théorème de la valeur moyenne ; appliqué ici ;
nous dirait qu'il existe $c \in]-1; 1[$ tel que
 $f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = 0$ or $f'(c) = -\frac{2}{c^3}$ qui ne
s'annule jamais. Cela veut dire que le théorème
de la valeur moyenne ne s'applique pas ici ; car
 f n'existe pas en 0 \Rightarrow n'est pas continue sur $[-1; 1]$

QUESTION 3. Soit le SDD $x_{t+1} = \frac{ax_t}{1+x_t^2}$ avec le paramètre $a > 0$.

(a) Calculer les points fixes pour ce SDD. Pour quelles valeurs de a y a-t-il un point fixe $x^* > 0$?

Les points fixes sont tels que $x = f(x) \Rightarrow x = \frac{ax}{1+x^2}$.

on voit que $x^* = 0$ est une solution triviale

$\Rightarrow 1 = \frac{a}{1+x^2} \Rightarrow 1+x^2 = a \Rightarrow x^2 = a-1$. donc il faut que $a > 1$
 D'où les points fixes positifs sont

Réponse: $x_1^* = 0$ et $x_2^* = \sqrt{a-1}$ avec $a > 1$.

Pour toutes les questions suivantes, on pose $a = 2$.

(b) Déterminer la stabilité de chaque point fixe trouvé en (a), en utilisant la règle vue en classe.

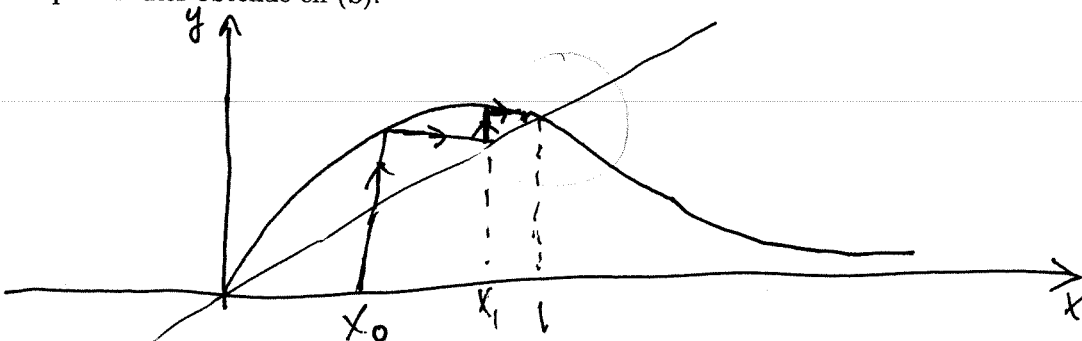
$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

en $x_1^* = 0 \rightarrow f'(0) = 2 \Rightarrow |f'(0)| > 1 \Rightarrow x_1^* = 0$ est instable.

en $x_2^* = 1 \rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow |f'(1)| < 1 \Rightarrow x_2^* = 1$ est stable.

Réponse: x_1^* est instable et x_2^* est stable.

(c) Tracer le graphe en toile d'araignée pour $a = 2$, $x \geq 0$ et confirmer la stabilité des points fixes obtenue en (b).



DÉFI (NE SERA PAS CORRIGÉ): Refaire le problème pour un a général, i.e. ne pas poser $a = 2$.

QUESTION 4. On s'intéresse à une autre façon de modéliser la récolte pour un système discret. Comme pour le modèle vu en classe, l'objectif est de trouver le taux de récolte optimal et évaluer si le système est stable pour ce taux de récolte optimal.

Supposons qu'une population de taille x_t produise $\frac{3x_t}{1+x_t}$ individus à chaque génération en l'absence de récolte. Supposons ensuite que l'on récolte une fraction h de ces individus et qu'on laisse la fraction restante $(1-h)$ se multiplier. Alors le SDD pour la population (survivante) est

$$x_{t+1} = (1-h) \frac{3x_t}{1+x_t},$$

et la récolte est $y_t = h \frac{3x_t}{1+x_t}$. On suppose que $0 \leq h \leq 1$.

(a) Calculer les points fixes du SDD. Comment doit-on choisir le taux de récolte h pour garantir la persistance de la population? [La persistance de la population veut dire que le SDD a un point fixe strictement positif.]

les points d'équilibre sont tels que $f(x) = x$
 d'où $(1-h) \frac{3x}{1+x} = x$ donc $x_1^* = 0$ (solution triviale)
 et d'où $(1-h) \frac{3}{1+x} = 1 \Rightarrow 3(1-h) = 1+x \Rightarrow x_2^* = \frac{2-3h}{1}$
 pour que x_2^* soit positif il faut que $0 < h < \frac{2}{3}$

Réponse: $x_1^* = 0$ et $x_2^* = 2 - 3h$ avec $0 < h < \frac{2}{3}$

(b) Calculer le taux de récolte optimal qui maximise la récolte à l'équilibre, i.e. calculer la valeur de $h \in [0, 1]$ qui maximise $y^* = h \frac{3x^*}{1+x^*}$ pour le point fixe x^* obtenu en (a).

en remplaçant x^* par $2-3h$ on a
 $y^* = h \frac{3(2-3h)}{1+(2-3h)} = \frac{h(2-3h)}{1-h} =$ fonction positive de h .

en dérivant ; on obtient.

$$(y^*)' = \frac{(2-6h)(1-h) + h(2-3h)}{(1-h)^2} = \frac{2-6h+3h^2}{(1-h)^2}$$

cette dérivée sera nulle si $3h^2 - 6h + 2 = 0$
 or puisque $0 < h < \frac{2}{3}$

donc si $h = \frac{6 \pm \sqrt{36-24}}{6} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$
 on ne garde que la solution $h = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,4226 < \frac{2}{3}$

$h = 0,4226$ étant le seul point critique dans l'intervalle $[0, \frac{2}{3}]$ donc il correspond à un maximum.

Réponse: y^* est maximale si $h = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,4226$

(c) Est-ce que ce taux de récolte optimal est compatible avec la persistance de la population?
 Est-ce que le point fixe correspondant du SDD est stable?

on a $f(x) = \frac{3(1-h)x}{1+x} \Rightarrow f'(x) = \frac{3(1-h)}{(1+x)^2}$ donc $f'(x_i^*) = \frac{3(1-h)}{(3-3h)^2} = \frac{1}{3(1-h)}$

$$\Rightarrow f'(x_i^*) = \frac{1}{3[1-(1-\frac{1}{\sqrt{3}})]} = \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow |f'(x_i^*)| < 1$$

Réponse: $x_{SDD}^* = 2-3h$ avec $h = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ est stable

QUESTION 5. Soit l'équation $e^x + e^{-x} = 3$.

(a) Expliquer pourquoi cette équation a une solution, notée x^* , dans l'intervalle $[0, 1]$.

Soit $f(x) = e^x + e^{-x} - 3$
 Cette fonction est continue sur $[0, 1]$.
 $f(0) = 1 + 1 - 3 = -1 < 0$
 $f(1) = e + \frac{1}{e} - 3 > 0$ } \Rightarrow il existe un point $c \in]0, 1[$
 tel que $f(c) = 0$

(b) Appliquer la méthode de Newton pour approximer la solution de l'équation en (a). Com-
 mencer avec $x_0 = 1$ et calculer x_1, x_2, x_3 en utilisant 8 chiffres après la virgule.

$$x_0 = 1 \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{(e^{x_n} + e^{-x_n} - 1)}{(e^{x_n} - e^{-x_n})}$$

en appliquant cette formule de Newton; on obtient

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,96334191 \\ x_2 &= 0,96242422 \\ x_3 &= 0,96242365 \end{aligned}$$