Version A

Exercice 1 (6 points): Utiliser les règles de dérivation pour calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes (Ne simplifiez pas vos réponses).

(a) $h(x) = \ln\left(7 - x^3 \ln(x)\right)$

$$h'(x) = \frac{-3x^2 \ln x - x^3\left(\frac{1}{x}\right)}{7 - x^3 \ln x} = \frac{-3x^2 \ln x - x^2}{7 - x^3 \ln x}$$

(b) $f(x) = \dfrac{x^4 - x^{-4}}{x^3 + x^{-3}} + e^x \ln(x)$

$$f'(x) = \frac{\left(4x^3 + 4x^{-5}\right)\left(x^3 + x^{-3}\right) - \left(x^4 - x^{-4}\right)\left(3x^2 - 3x^{-4}\right)}{\left(x^3 + x^{-3}\right)^2} + e^x \ln x + \frac{e^x}{x}$$

(c) $g(x) = \left(\dfrac{\sqrt{x+1}}{e^{x^2} + 3}\right)^5$

$$g'(x) = 5\left(\frac{\sqrt{x+1}}{e^{x^2}+3}\right)^4 \left[\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)\left(e^{x^2}+3\right) - \sqrt{x+1}\left(e^{x^2}\right)(2x)}{\left(e^{x^2}+3\right)^2}\right]$$

Exercice 2(6 points) : **Sans utiliser les tableaux de valeurs**, calculer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{3x^2+8x-3}{x+3}$ $= \dfrac{0}{0}$ (F. ind).

or $3x^2+8x-3 = (x+3)(3x-1)$ donc

$$\lim_{x\to -3} \frac{3x^2+8x-3}{x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(3x-1)}{(x+3)} = \lim_{x\to -3} (3x-1) = \underline{\underline{-10}}$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x^2-x}\right)$ $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2}{x(2x^2-x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{2x^2-x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{2x-1} = \underline{\underline{-2}}$$

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x^2}{\sqrt{25x^4-2}}$ $= \dfrac{\infty}{\infty}$ (F. ind)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{4x^2}{5x^2\sqrt{1-\frac{2}{25x^4}}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4}{5\sqrt{1-\underbrace{\frac{2}{25x^4}}_{\to 0}}} = \underline{\underline{\frac{4}{5}}}$$

Exercice 3 (4 points): **Utiliser la définition de la dérivée** pour calculer la dérivée de

$f(x) = 5 + \sqrt{3x+2}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left[5+\sqrt{3(x+h)+2}\right] - \left[5+\sqrt{3x+2}\right]}{h}.$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{3(x+h)+2} - \sqrt{3x+2}}{h} = \frac{0}{0} \text{ (F. ind)}$$

or

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left[\sqrt{3(x+h)+2} - \sqrt{3x+2}\right]\left[\sqrt{3(x+h+2} + \sqrt{3x+2}\right]}{h\left[\sqrt{3(x+h)+2} + \sqrt{3 \cdot x+2}\right]}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[3(x+h)+2)\right] - (3x+2)}{h\left[\sqrt{3(x+h)+2} + \sqrt{3x+2}\right]} = \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h\left[\sqrt{3(x+h)+2} + \sqrt{3x+2}\right]}$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}.$$

Ce qu'on peut vérifier en calculant directement la dérivée

Exercice 4 (4 points): Utiliser la différentiation implicite pour déterminer y' dans l'équation suivante :

$$e^{xy} = y^5$$

en dérivant les deux termes de l'égalité

on a :

$$e^{xy}\left[y + xy'\right] = 5y^4 y'$$

$$\Rightarrow y'\left[xe^{xy} - 5y^4\right] = ye^{xy}.$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = \frac{ye^{xy}}{xe^{xy} - 5y^4}}$$

Exercice 5 (6 points): Un patient prend une dose quotidienne de d mg du médicament FilGud®. Durant une journée, 30% du médicament est métabolisé et ainsi seulement la fraction $p = 0.7$ reste dans le sang. Soit x_n la quantité en mg du médicament FilGud® dans le sang après n jours. Le SDD qui modélise x_n est donné par

$$x_{n+1} = 0.7x_n + d$$

(a) **(1 point)** Donner la fonction qui génère ce système dynamique.

$$f(x) = 0{,}7x + d$$

(b) **(1 point)** Trouver le point d'équilibre de ce système.

le point d'équilibre est tel que $p = f(p)$

$\Rightarrow p = 0{,}7p + d \Rightarrow 0{,}3p = d$

d'où $p = \dfrac{d}{0{,}3}$

(c) **(2 points)** Supposant que la dose quotidienne du médicament FilGud® $d = 1{,}5$. Déterminer la solution générale de ce système

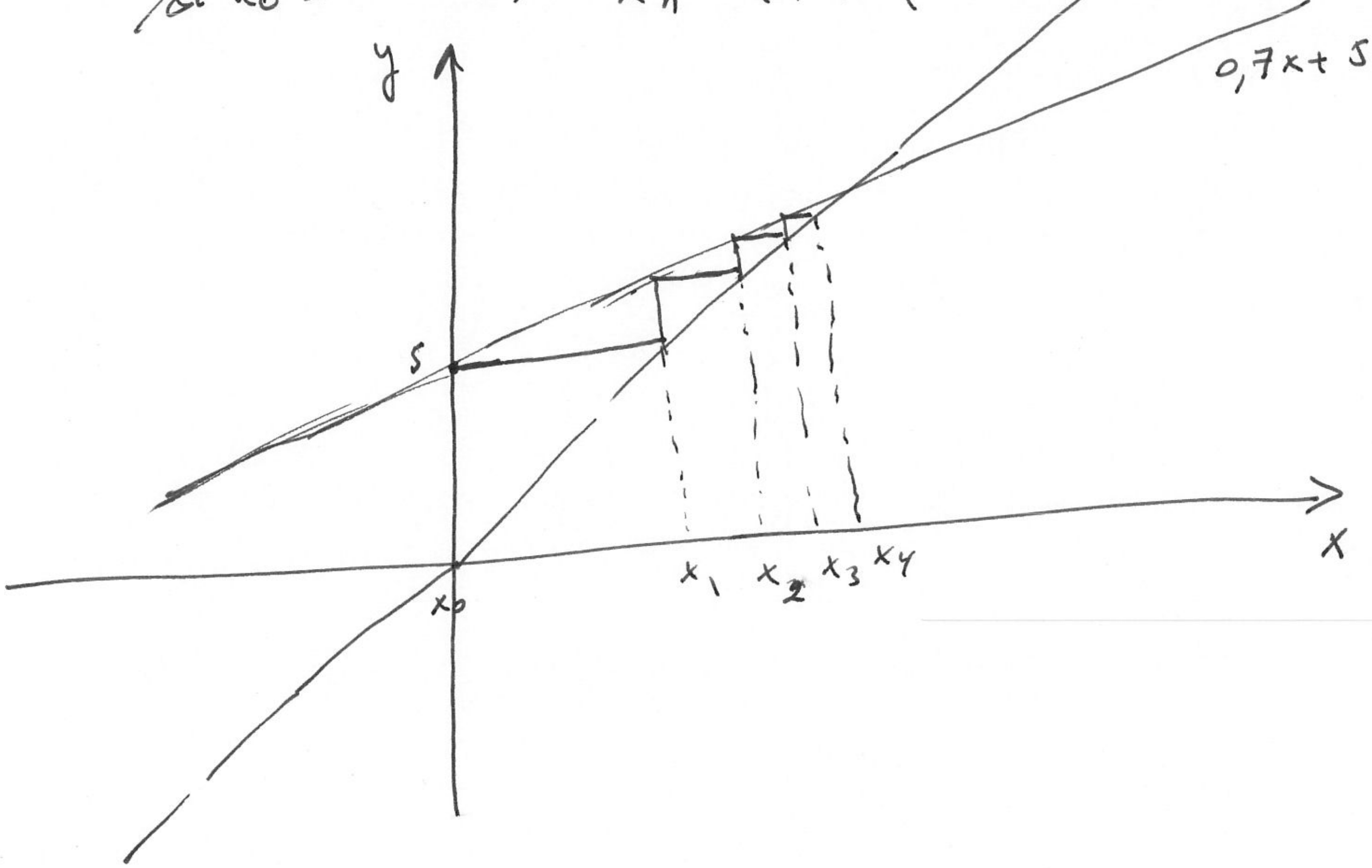
$$x_n = (0{,}7)^n (x_0 - p) + p$$

si $d = 1{,}5 \Rightarrow p = \dfrac{1{,}5}{0{,}3} = 5$ d'où

$$\boxed{x_n = (0{,}7)^n (x_0 - 5) + 5}$$

(d) **(1 points)** Tracer la toile d'araignée (4 itérations) lorsque $x_0 = 0$

Si $x_0 = 0 \Rightarrow x_n = (0,7)^n(-5) + 5$



(e) **(1 points)** Est-ce que le point d'équilibre est stable ? Pourquoi ?

le point d'équilibre est stable.

car les points x_n converge vers $\underline{p = 5}$

Exercice 6 (4points): Soit la fonction définie par partie suivante :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-5|}{x^2-25} & \text{si } x\neq 5\\ x+a & \text{si } x=5\end{cases}$$

Existe-t-il une constante a telle que cette fonction soit continue en $x=5$? Justifiez votre réponse.

on a $|x-5| = \begin{cases} x-5 & \text{si } x>5 \\ -(x-5) = -x+5 & \text{si } x<5 \end{cases}$

donc

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-5}{x^2-25} = \dfrac{1}{x+5} & \text{si } x>5\\ \dfrac{-x+5}{x^2-25} = -\dfrac{1}{x+5} & \text{si } x<5 \\ x+a & \text{si } x=5\end{cases}$$

pour que f soit continue en $x=5$; il faut que

① $f(5)=5+a$ existe

② $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \dfrac{1}{10}$ et $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = -\dfrac{1}{10}$ ces deux limites ; doivent être égales

ce qui n'est pas le cas

$\Longrightarrow$ il n'existe pas de valeur de a qui puisse rendre cette fonction continue

Version B

Exercice 1 (6 points): Utiliser les règles de dérivation pour calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes (Ne simplifiez pas vos réponses).

(a) $f(x) = \frac{x^4 - x^{-4}}{x^3 + x^{-3}} + e^x \ln(x)$

$$f'(x) = \frac{(4x^3 + 4x^{-5})(x^3 + x^{-3}) - (x^4 - x^{-4})(3x^2 - 3x^{-4})}{(x^3 + x^{-3})^2} + e^x \ln x + \frac{e^x}{x}.$$

(b) $g(x) = (\frac{e^x \ln(x)}{e^{x^2}+5})^8$

$$g'(x) = 8\left(\frac{e^x \ln x}{e^{x^2}+5}\right)^7 \frac{\left(e^x \ln x + \frac{e^x}{x}\right)\left(e^{x^2}+5\right) - e^x \ln x \left(e^{x^2}\right) 2x}{\left(e^{x^2}+5\right)^2}.$$

(c) $h(x) = \frac{x^3}{1+x^3}$

$$h'(x) = \frac{3x^2(1+x^3) - x^3(3x^2)}{(1+x^3)^2} = \frac{3x^2}{(1+x^3)^2}$$

Exercice 2(6 points) : **<u>Sans utiliser les tableaux de valeurs</u>**, calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2-3x-2}{2x-4}$ $= \frac{0}{0}$ (F. ind).

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2-3x-2}{2x-4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(2x+1)}{2(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{2x+1}{2} = \frac{5}{2}$$

(b) $\lim_{x \to 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+x})$ $= \lim_{x \to 0} \frac{x^2+x-x}{x(x^2+x)}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x(x^2+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2+x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x+1} = 1.$$

(c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4+2}}$ $= \frac{\infty}{\infty}$ (F. ind)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4+2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{1+\frac{2}{x^4}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x^4}}}$$

$= 1$ car $\frac{2}{x^4} \to 0$.

Exercice 3 (4 points): **<u>Utiliser la définition de la dérivée</u>** pour calculer la dérivée de $f(x) = -(x-1)^2 + 2014x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[-(x+h-1)^2 + 2014(x+h)\right] - \left[-(x-1)^2 + 2014x\right]}{h} = \frac{0}{0} \text{ (F.ind.)}$$

<u>on développe</u> <u>et on simplifie</u>

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left[-(x-1)^2 - 2h(x-1) + h^2 + 2014x + 2014h\right] - \left[-(x-1)^2 + 2014x\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2h(x-1) + h^2 + 2014h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} -2(x-1) + h + 2014 = -2(x-1) + 2014$$

Ce qu'on peut vérifier si on calcule la dérivée <u>directement</u>

Exercice 4 (4 points): Utiliser la différentiation implicite pour déterminer y' dans l'équation suivante :

$$e^{xy} = y^4$$

On calcule la dérivée des deux termes de l'égalité et on obtient

$$e^{xy}\left[\cancel{y} + xy'\right] = 4y^3 \cdot y'$$

et on isole les termes contenant y' $\Rightarrow$

$$y'\left[xe^{xy} - 4y^3\right] = y e^{xy}$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = \frac{y e^{xy}}{xe^{xy} - 4y^3}}$$

Exercice 5 (6 points): Pour rendre les oiseaux heureux, Monique dépose d grammes de graines de tournesol au début de chaque semaine dans un endroit bien en vue. Durant la semaine, les oiseaux mangent 4/5 des graines disponibles. Ce qui fait que le système dynamique modélisant la quantité des graines disponibles est :

$G_{t+1} = 0{,}2G_t + d$ où t mesure le nombre de semaines

(a) (1 point) Donner la fonction qui génère ce système dynamique.

$$f(x) = 0{,}2\,x + d.$$

(b) (1 point) Trouver le point d'équilibre de ce système.

le point d'équilibre p est tel que.

$$p = f(p) \Rightarrow p = 0{,}2p + d \Rightarrow 0{,}8\,p = d$$

$$\Longrightarrow \boxed{p = \frac{d}{0{,}8}}$$

(c) (2 points) Supposons que la quantité déposée chaque semaine est $d = 40$. Déterminer la solution générale de ce système.

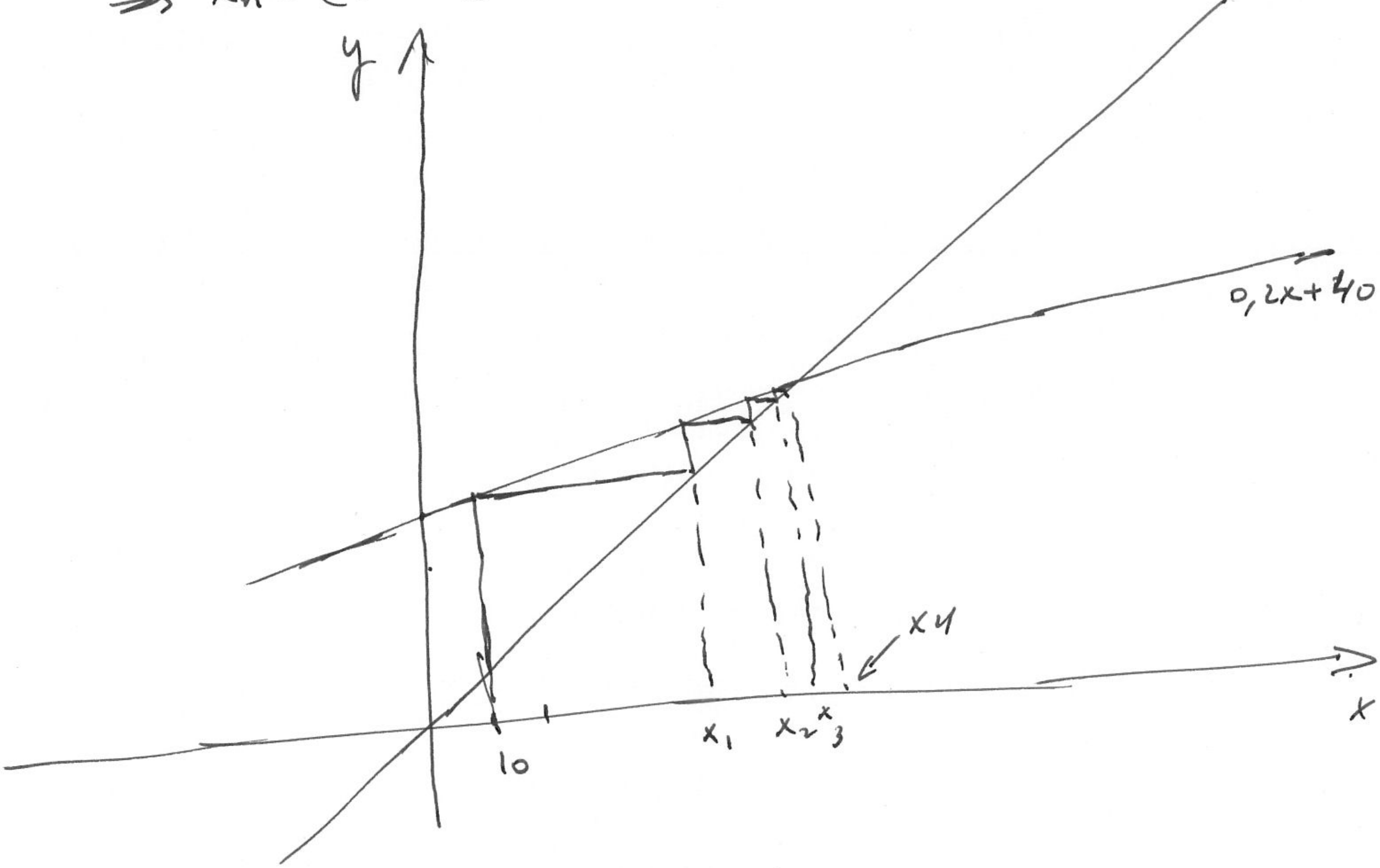
Si $d = 40 \Rightarrow p = 200$

$$x_n = (0{,}2)^n (x_0 - p) + p = \boxed{(0{,}2)^n (x_0 - 200) + 200}$$

(d) (1 points) Tracer la toile d'araignée (4 itérations) lorsque $G_0 = 10$

si G_0 ou $x_0 = 10$

$\Rightarrow x_n = (0,8)^n(10-200)+200 = -190\,(0,8)^n + 200.$



(e) (1 points) Est-ce que le point d'équilibre est stable ? Pourquoi ?

le point d'équilibre est stable ; car les points x_n converge vers ~~le~~ point d'équilibre

Exercice 6 (4points): Soit la fonction définie par partie suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x^2-9} & si \quad x \neq 3 \\ x+a & si \quad x = 3 \end{cases}$$

Existe-il une constante a telle que cette fonction soit continue en x=3 ?
Justifiez votre réponse.

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x > 3 \\ -(x-3) & \text{si } x < 3. \end{cases}$$

donc

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{x^2-9} = \dfrac{1}{x+3} & \text{si } x > 3 \\ \dfrac{-(x-3)}{x^2-9} = -\dfrac{1}{x+3} & \text{si } x < 3 \\ x+a & \text{si } x = 3. \end{cases}$$

Pour que f soit continue en $x=3$ il faut que

1. $f(3) = 3+a$ existe
2. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{6}$

   $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} -\dfrac{1}{x+3} = -\dfrac{1}{6}$

   ces deux limites doivent être égales

Ce qui n'est pas le cas ici

$\Rightarrow$ il n'existe pas de valeur de a qui puisse rendre cette fonction continue en $x=3$