MAT 1725 : Calcul différentiel et intégral II et introduction à l'analyse mathématique

Hiver 2015

Notes de cours

Prof : Monica Nevins

Ces notes sont mes notes de cours personnelles ; elles sont plein de fautes de frappe, de grammaire et d'orthographe. Par contre, elles contiennent aussi beaucoup d'exercices à tenter pour vous aider à maîtriser la matière. Ne veuillez jamais imaginer que lire ces notes remplaÃ§era assister au cours comme moyen d'apprendre l'analyse mathématique.

Ces notes ont été développées à partir le plusieurs sources, incluant particulièrement les notes de Barry Jessup pour MAT2125, les notes de cours par André Giroux de l'Université de Montéal (publié sur son site web), le manuel numérisé par William F. Trench : Introduction to Real Analysis (2003) et mes notes de cours de MAT1325 datant de l'hiver de 2012.

Dernier mis-à-jour : 15 avril 2015

Table des matières

Notation

$\mathbb{N}$ $= \{0, 1, 2, \cdots\}$, les nombres naturels

$\mathbb{N}_0$ $= \mathbb{N}$, quand on veut s'assurer qu'on inclut 0

$\mathbb{N}_+$ $= \{1, 2, \cdots\}$

$\mathbb{Z}$ $= \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$, les entiers

$\mathbb{Q}$ $= \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ où $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ quand $mn' = m'n$, les nombres rationnels

$\mathbb{Q}^*$ $= \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, les nombres rationnels excluant 0

$\mathbb{R}$ les nombres réels

$\mathbb{R}^*$ $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$, les nombres réels excluant 0

$\mathbb{C}$ $= \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ où $i^2 = -1$, les nombres complexes

$n!$: le factoriel de n, défini pour tout $n \in \mathbb{N}_+$ par $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$ et $0! = 1$

$\binom{n}{k}$ $= \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$. C'est le nombre de façons de tirer k balles d'un sac contenant n balles.

$\sum_{k=1}^{n} f(k)$ $= f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$, une somme de termes qui dépendent d'un index k, lorsque k prend toutes les valeurs de 1 à n

$\forall$: pour tout

$\exists$: il existe

$A \Rightarrow B$: A implique B, A entraîne B, si A est vrai alors B est vrai

$A \Leftrightarrow B$: A est vrai si et seulement si B est vrai

ssi : si et seulement si

$E \cup F$ $= \{x \mid x \in E$ ou $x \in F\}$, la réunion de deux ensembles

$E \cap F$ $= \{x \mid x \in E$ et $x \in F\}$, l'intersection de deux ensembles

(a, b) $= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, aussi écrit $]a, b[$

$[a, b]$ $= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$[a, b)$ $= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$(a, b]$ $= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

(a, ∞) $= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

$(-\infty, a)$ $= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

$f\colon U \to \mathbb{R}$, une fonction définie sur le domaine $U \subseteq \mathbb{R}$ et prenant valeurs en $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2$ $= \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ les pairs ordonnés de nombres réels

Chapitre 1

Introduction : Les nombres réels

> Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk. – Leopold Kroenecker

1.1 Que sont les nombres ?

Il y a plusieurs ensembles qu'on appelle “nombres” :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

où
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}(= \mathbb{N}_0)$ ou $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, \cdots\}$ (les entiers naturels),
- $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ (les entiers),
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ où $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ quand $mn' = m'n$ (les nombres rationnels),
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{?\}$ (les nombres réels) (et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont donc dit irrationnels)
- $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ où $i^2 = -1$ (les nombres complexes) [1]

On sait que $\mathbb{R}$ est plus grand que $\mathbb{Q}$; les Pythagores le savaient eux aussi, car ils ont démontré le théorème suivant.

Théorème 1.1 (Dû au groupe de Pythagore, 5e siècle avant J.-C.)**.** *Le “nombre” $\sqrt{2}$ est irrationnel, c-à-d, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.*

Démonstration. On va argumenter que l'énoncé “$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$” est absurde ; d'où la conclusion cherchée. C'est un *argument par contradiction* ou un *raisonnement par l'absurde*, et c'est classique.

Si $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, alors il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $m, n > 0$ tels que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Puisqu'on peut réduire la fraction si nécessaire, on peut supposer que $pgcd(m, n) = 1$, c-à-d, ils n'ont aucun facteur en commun.

Si $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, alors $2 = \frac{m^2}{n^2}$, et alors $2n^2 = m^2$.

---

1. Il y a plusieurs autres “nombres” qu'on pourrait également mettre sur cette liste : les nombres p-adiques, pour chaque premier p contiennent aussi $\mathbb{Q}$ mais ne sont pas ordonnés ; les corps algébriques contenant $\mathbb{Q}$ qui ne sont pas complets ; ou les nombres surréels découverts par John Conway, qui n'ont pas la propriété archimédienne.

Donc m^2 est pair ; il en suit que m est pair. (Exercice) Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m = 2k$, qui nous mène à

$$2n^2 = (2k)^2.$$

Donc $2n^2 = 4k^2$, et alors $n^2 = 2k^2$. Il en suit que n^2 est pair, et alors que n est pair.

Mais on vient de déduire que m et n ont le facteur 2 en commun, ce qui contredit notre hypothèse de départ. C'est une contradiction, et donc il faut conclure que notre hypothèse de départ était fausse, et que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

Bon : $\mathbb{R}$ est plus grand que $\mathbb{Q}$. Il y a beaucoup de racines de polynômes qui ne sont pas rationnels (et aussi beaucoup qui ne sont pas réels !) ; en les ajoutant tous à $\mathbb{Q}$ on obtient les *nombres algébriques.*

Mais il existe aussi des nombres réels, comme π ou e, qui sont des nombres transcendants (c-à-d, pas algébriques). [2]

Donc la question se pose : d'où viennent les "nombres réels" ? Comment est-ce qu'on les définit ? Est-ce qu'on aurait pu choisir un autre ensemble de nombres à la place de $\mathbb{R}$?

Considèrons notre définition des nombres réels :

$$\mathbb{R} = \{\text{toute expression d'un entier suivit d'un décimal, fini ou infini}\}.$$

Ce n'est pas une définition exacte ; par exemple, $1 = 0.\overline{9}$ (Exercice). En plus, c'est "impossible" de prendre la somme de deux tels "nombres" (essayez !). Mais quand même : Elle comprend $\mathbb{Q}$ (qui sont les décimales qui, après un nombre fini de termes, sont formés d'une suite repété de chiffres), et

$$\sqrt{2} = 1.41421\ldots, \quad \text{et} \quad \pi = 3.14159\ldots.$$

Par contre, en admettant tous ces expression, on a ajouté un montant stupéfiant de "nombres" à $\mathbb{Q}$ [3] Est-ce que c'était vraiment nécessaire ? Et est-ce que cette "définition" ait même un sens ?

Donc, notre premier objectif est d'établir que sont les nombres réels. C'est ainsi que le sujet était initié au début du XIXe siècle par Cauchy, entre autres.

Commençons avec les propriétés essentielles $\mathbb{Q}$, qu'on appelle *les axiomes d'un corps.* Ce sont les lois obéit par $\mathbb{Q}$ (et aussi tout corps, incluant éventuellement $\mathbb{R}$) et *de quelles tous les autres propriétés suivent logiquement.*

On groupes les axiomes en plusieurs catégories.

1.1.1 L'addition

L'ensemble $\mathbb{Q}$ admet une opération $+$ qui s'appelle addition, qui est une fonction

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

2. La première preuve d'existence de nombres transcendants se fut au IX siècle ; vous pouvez voir des esquisses de ces preuves sur Wikipédia, par exemple. Ce n'est pas facile !

3. C'est un argument célèbre de Cantor qui nous démontre ce fait.

qui obéit les axiomes suivants :

A1. Pour tout $a, b \in \mathbb{Q}$, $a + b = b + a$ (la commutativité)

A2. Pour tout $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$ (l'associativité)

A3. Il existe un nombre $0 \in \mathbb{Q}$ tel que $\forall a \in \mathbb{Q}$, $0 + a = a$ (l'unité de l'addition) [4]

A4. $\forall a \in \mathbb{Q} \exists b \in \mathbb{Q}$ *t.q.* $a + b = 0$ (existence de l'inverse additif) ; pour un tel a on définit $-a := b$.

On peut en déduire, par exemple, que pour tout $a \in \mathbb{Q}$, $a + 0 = a$, car $a + 0 = 0 + a$ (par A1) et $0 + a = a$ (par A3).

Les axiomes A1 et A2 nous promettent que l'expression suivant n'est pas ambiguë, par exemple :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

1.1.2 La multiplication

L'ensemble $\mathbb{Q}$ admet une opération $\times$ qui s'appelle la multiplication, qui est une fonction

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

qui obéit les axiomes M1 à M4, et D1, suivants. Ici, il faut définir

$$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\} = \{\text{les nombres rationnels non-nuls}\}.$$

M1. Pour tout $a, b \in \mathbb{Q}$, $ab = ba$ (la commutativité)

M2. Pour tout $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $(ab)c = a(bc)$ (l'associativité)

M3. Il existe un nombre $1 \in \mathbb{Q}^*$ tel que $\forall a \in \mathbb{Q}^*$, $1a = a$ (l'unité de la multiplication)

M4. $\forall a \in \mathbb{Q}^* \exists b \in \mathbb{Q}$ *t.q.* $ab = 1$ (l'existence de l'inverse multiplicatif) ; pour un tel a on définit $a^{-1} := b$.

D1. $a(b + c) = ab + ac$ (la distributivité)

Toutes les propriétés d'addition et de multiplication de $\mathbb{Q}$ suivent de ces 9 axiomes. [5] Faisons un petit exemple.

Lemme 1.2. *Dans un corps,* $0a = 0$.

Démonstration. Par A3, $0 + 0 = 0$. Donc

$$\begin{aligned} 0a &= a0 \quad \text{par M1} \\ &= a(0 + 0) \quad \text{car } 0 + 0 = 0 \\ &= a0 + a0 \quad \text{par D1} \end{aligned}$$

4. On écrit $\forall$ pour dire “pour tout” et $\exists$ pour dire “il existe”.

5. Tout ensemble qui possède deux opérations $+$ et $\times$ pour lesquels ces 9 axiomes sont vrais s'appelle un corps — et c'est très intéressant de trouver des corps.

Donc $a0 = a0 + a0$. Le nombre (qui est le résultat de) $a0$ admet, par A4, un inverse additif $-(a0)$. Donc

$$\begin{aligned} 0 &= a0 + (-(a0)) \quad \text{par A4} \\ &= (a0 + a0) + (-(a0)) \quad \text{par le calcul précédant} \\ &= a0 + (a0 + (-(a0))) \quad \text{par A2} \\ &= a0 + 0 \quad \text{par A4} \\ &= 0 + a0 \quad \text{par A1} \\ &= a0 \quad \text{par A3} \end{aligned}$$

or $0 = a0 = 0a$, CQFD. □

Il faut parfois être malin pour déduire une preuve d'un fait "évident" à partir des axiomes ! Le défi n'est pas de voir si quelque chose est vrai (typiquement, on le sait) mais de voir comment ce fait suit uniquement des 9 axiomes.

Avec M1 et M2 on voit qu'on peut définir sans ambiguité, pour $x \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}_+$,

$$x^n = x \cdot x \cdot x \cdots x \quad n \text{ fois.}$$

Pour $x \neq 0$ on pose $x^0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}_+$, $x^{-n} := (x^{-1})^n$. Les termes 0^n pour $n \leq 0$ ne sont pas définis ; par contre, c'est souvent commode de choisir $0^0 = 1$ pour nos formules.

Lemme 1.3. *Pour tout $x, y \neq 0$ et $m, n \in \mathbb{Z}$ on a*

1. $x^n x^m = x^{n+m}$,
2. $(x^n)^m = x^{nm}$,
3. $(xy)^n = x^n y^n$,

mais ce n'est pas vrai en général que $(x + y)^n = x^n + y^n$.

La démonstration est un exercice. Veuillez noter qu'on n'est pas capable de définir $x^{\frac{1}{2}}$ avec cette approche ; en effet, puisque $(-1)^{\frac{1}{2}}$ n'est pas défini et $2^{\frac{1}{2}}$ n'est pas dans $\mathbb{Q}$, on réalise que l'existence des puissances fractionnels ne pourraient jamais suivre de nos 9 axiomes.

1.1.3 Exercices

Vous avez lu beaucoup de mathématiques ; c'est maintenant le moment de l'apprendre. Il faut utiliser les maths pour développer votre propre boîte d'outils mathématiques avec quelle vous allez resoudre des problèmes tout le long du trimestre. Choississez une ou deux des exercices suivants pour commencer ; revenez à cette liste quand vous étudiez pour un test ou un examen, ou quand vous vous trouvez en désespoir de comprendre un exercice du devoir.

1. Un nombre entier n est pair si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. Autrement, il est impair et $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. Démontrer à partir des axiomes que si n^2 est pair alors n est pair. (Conseil : c'est plus facile de démontrer *la contraposée* de cet énoncé, c-à-d, tenter de démontrer que si n n'est pas pair, alors n^2 n'est pas pair.)

2. Démontrer que $0.\overline{9} = 0.99999999\cdots$ est exactement égale à 1.
3. Démontrer (à partir des axiomes) que si $z \in \mathbb{Q}$ est un nombre qui satisfait que $\forall x \in \mathbb{Q}$, $x+z = x$, alors $z = 0$. On en conclut que l'élément neutre pour l'addition est unique, pour tout corps.
4. Démontrer (à partir des axiomes) que si $x \in \mathbb{Q}^*$ et $\exists y, z \in \mathbb{Q}^*$ tels que $xy = 1$ et $xz = 1$, alors $y = z$. On en conclut que l'inverse multiplicatif d'un élément est unique.
5. Démontrer (à partir des axiomes) que $\forall x \in \mathbb{Q}$, $(-1)x = -x$. (Attention : à droite, c'est l'inverse additif de x ; à gauche, c'est la multiplication de l'inverse additif de 1 (donc, -1) par le nombre x.) Donc notre notation n'est pas ambiguë.
6. Démontrer que si $x, y \in \mathbb{Q}$ et $xy = 0$ alors soit $x = 0$ ou $y = 0$. (Attention : la question *n'est pas* : démontrer que si $x = 0$ ou $y = 0$ alors $xy = 0$. Ça, c'est le Lemme 1.2.) Conseil : c'est très difficile de démontrer que *ci* ou *ça* soit vrai — c'est comme une cible mobile. Tenter en place de démontrer : si $xy = 0$ et $x \neq 0$, alors forcément $y = 0$. Voyez-vous que c'est logiquement l'équivalent ?
7. Démontrer que $\mathbb{Z}$ n'est pas un corps. Conseil : il suffit de démontrer l'existence d'un seul axiome qui n'est pas toujours vrai.
8. Démontrer que l'opération $\div$ sur $\mathbb{Q}^*$ ne satisfait ni la commutativité ni l'associativité. De même pour l'opération $-$ sur $\mathbb{Q}$. Conclusion : on ne divise jamais ; on multiplie par l'inverse multiplicatif !

1.2 Les corps ordonnés et normés

Alors $\mathbb{Q}$ est un corps ; mais $\mathbb{Q}$ admet encore plus de structure.

1.2.1 La relation d'ordre

Les nombres rationnels sont ordonnés par une relation $<$ qui satisfait les axiomes suivants. Soient $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

R1. Pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$, exactement une des relations suivantes est vraie :

$$x < y \quad \text{ou} \quad x = y \quad \text{ou} \quad x > y.$$

R2. Si $x < y$ et $y < z$ alors $x < z$ (la transitivité)

R3. Si $x < y$ alors $x + z < y + z$ (conservé par l'addition)

R4. Si $x < y$ alors
- si $z > 0$ alors $xz < yz$ (conservé par la multiplication par les nombres strictement positives) ; mais
- si $z < 0$ alors $xz > yz$.

On peut démontrer à partir de ces axiomes les faits "évidents", comme $1 > 0$ et $-1 < 0$ (exercices). Notons que R4 ne tient pas pour la multiplication par un nombre négatif :

$$2 < 3 \quad \text{mais} \quad -2 > -3.$$

Quand on multiplie par un nombre (ou un variable !) négatif, il faut changer la direction de l'inégalité.

Exemple 1.4. Trouver tout x tel que $x^3 + 3x < -4x^2$.

La mauvaise réponse :

$$\begin{aligned} & x^3 + 3x < -4x^2 \\ & \Rightarrow x^2 + 3 < -4x \quad \text{en divisant par } x \\ & \Rightarrow x^2 + 4x + 3 < 0 \\ & \Rightarrow (x+1)(x+3) < 0 \\ & \Rightarrow x \in (-3, -1) \quad \text{car les terms doivent avoir signes opposés} \end{aligned}$$

Ce n'est pas la bonne réponse, car $-2 \in (-3, -1)$ mais $(-2)^3 + 3(-2) = -14$ et $-4(-2)^2 = -16$ et $-14 \not<= -16$.

Notre erreur : on a divisé par x, sans réfléchir au signe de x (ou même si $x \neq 0$!).

La bonne réponse :

$$\begin{aligned} & x^3 + 3x < -4x^2 \\ & \Rightarrow x^3 + 4x^2 + 3x < 0 \\ & \Rightarrow x(x+1)(x+3) < 0 \\ & \Rightarrow x < -3 \quad \text{ou} \quad -1 < x < 0. \end{aligned}$$

On vérifie que c'est vrai en traçant la courbe $y = x(x+1)(x+3)$.

Exemple 1.5. Trouver tout x tel que $\frac{1}{3-x} < 2$.

La mauvaise réponse :

$$\frac{1}{3-x} < 2 \quad \Rightarrow \quad 1 < 2(3-x), \quad \Rightarrow 1 < 6 - 2x \Rightarrow 2x < 5 \Rightarrow x < \frac{5}{2}. \tag{1.1}$$

En traçant la courbe, on voit que la réponse est fausse (ou au moins, incomplet), Évidement tout $x > 3$ donne $\frac{1}{3-x} < 0 < 2$. L'erreur : si $3 - x < 0$, y multipliant change la direction de l'inégalité.

Deux bonnes réponses :

1. On divise en cas : le cas que $x < 3$ et le cas que $x > 3$ (le cas $x = 3$ étant exclu implicitement).

Si $x < 3$, alors $3 - x > 0$, alors nos démarches (1.1) ci-haut sont vrais. Donc dans ce cas, l'inégalité est satisfaite ssi[6] $x < \frac{5}{2}$.

Si $x > 3$, alors $3 - x < 0$. Alors on a

$$\frac{1}{3-x} < 2 \quad \Rightarrow \quad 1 > 2(3-x), \quad \Rightarrow 1 > 6 - 2x \Rightarrow 2x > 5 \Rightarrow x > \frac{5}{2}.$$

Mais tout $x > 3$ satisfait déjà que $x > \frac{5}{2}$; donc dans ce cas, l'inégalité est toujours satisfaite.

Conclusion : l'ensemble de solutions est $(-\infty, \frac{5}{2}) \cup (3, \infty)$. $\square$

6. si et seulement si

2. L'argument précédent (cas par cas) est ennuyeux. Beaucoup plus facile, c'est **d'éviter de multiplier une inégalité par une expression variable à tout prix.** Par exemple :

$$\begin{aligned}\frac{1}{3-x} < 2 &\Rightarrow \frac{1}{3-x} - 2 < 0 \\ &\Rightarrow \frac{1-2(3-x)}{3-x} < 0 \\ &\Rightarrow \frac{-5+2x}{3-x} < 0\end{aligned}$$

qui est vrai si soit le numérateur est > 0 et le dénominateur < 0 (donc, $x > 3$) ou si le numérateur est < 0 et le dénominateur > 0 (donc, $x < \frac{5}{2}$).

En tout cas, on vérifie notre réponse avec un graphique — on en aura pas besoin quand on sera expert, et on ne peut pas s'en servir, quand il s'agit de fonctions à plusieurs variables, mais le graphique est un excellent outil pour nous aider à comprendre, et à perfectionner nos habitudes algébriques.

1.2.2 La norme = la valeur absolue

Définition 1.6. Le corps $\mathbb{Q}$ est normé, c'est-à-dire, admet une fonction *valeur absolue* ou *norme*[7] :

$$\begin{aligned}|\cdot| \colon \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q}_{\geq 0} \\ x &\mapsto |x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0\,; \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Exemple 1.7. Donc, par exemple,

$$|x^2+3x+2| = \begin{cases} x^2+3x+2 & \text{si } x^2+3x+2 \geq 0, \text{ et} \\ -(x^2+3x+2) & \text{si } x^2+3x+2 < 0. \end{cases}$$

C'est une bonne réponse mais pas très utile. Quand est-ce que $x^2+3x+2 \geq 0$? Bien, $x^2+3x+2 = (x+2)(x+1)$ donc les points critiques sont -1 et -2. Quand $x \leq -2$ ou $x \geq -1$, les deux facteurs ont le même signe, donc le produit est ≥ 0. Autrement, le produit est négatif. Donc on a

$$|x^2+3x+2| = \begin{cases} x^2+3x+2 & \text{si } x \leq -2 \text{ ou } x \geq -1, \text{ et} \\ -(x^2+3x+2) & \text{si } -2 < x < -1. \end{cases}$$

Dans ce cours, notre interêt à la valeur absolue sera plutôt en sa capacité d'exprimer la norme, ou la grandeur, d'une expression. Donc $|x-4|$ exprime la distance entre x et 4.

Lemme 1.8. *Soit $r > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons*

(a) $|x| < r$ ssi $x \in (-r, r)$;

7. On va voir que c'est extrêmement utile de penser à la valeur absolue de cette façon, c'est-à-dire, comme fonction, au lieu d'une opération magique qui enlève tout signe négatif (car ce dernier est infaisable quand il s'agit d'un variable).

(b) $|x| \leq r$ *ssi* $x \in [-r, r]$ *;*
(c) $|x - a| < r$ *ssi* $x \in (a - r, a + r)$ *;*
(d) $|x - a| \leq r$ *ssi* $x \in [a - r, a + r]$.

Démonstration. Démontrons (a), c-à-d que $|x| < r$ ssi $x \in (-r, r)$. Ce sont alors deux implications à démontrer : (1) $|x| < r$ implique $x \in (-r, r)$ et (2) $x \in (-r, r)$ implique $|x| < r$. [8]

(1) Supposons que $|x| < r$. Si $x \geq 0$, alors $|x| = x < r$, or $0 \leq x < r$, et la conclusion est satisfaite. Si $x < 0$, alors $|x| = -x < r$. Or, en multipliant par -1, on obtient $x > -r$. Donc $-r < x < 0$ et la conclusion est aussi satisfaite. Donc en tout cas, $-r < x < r$, ce qu'on écrit ègalement $x \in (-r, r)$.

(2) Supposons que $x \in (-r, r)$. Ça veut dire $-r < x < r$. En multipliant le tout par -1, on obtient $r > -x > -r$. Donc on a $-r < x < r$ et $-r < -x < r$; puisque $|x|$ est égale soit à x, soit à $-x$, on conclut que $-r < |x| < r$.

Les démonstrations de (b), (c) et (d) sont laissées comme exercice. □

Proposition 1.9. *La fonction valeur absolue satisfait les bonne propriétés suivantes. Soient* $a, b \in \mathbb{Q}$ *; alors*
(1) $|a| = 0$ *ssi* $a = 0$,
(2) $|ab| = |a||b|$ *et donc en particulier* $|a| = |-a|$,
(3) $|a + b| \leq |a| + |b|$ *(l'inégalité du triangle).*

Démonstration. (1) et (2) suivent de la définition de la valeur absolue.

(3) Remarquer que $x \leq |x|$: si $x \geq 0$, c'est une égalité; si $x < 0$ alors $x < 0 < -x = |x|$ et c'est une inégalité stricte.

On divise en cas.

Si $a + b \geq 0$, alors on a
$$|a + b| = a + b \leq |a| + |b|.$$
Si $a + b < 0$, alors on a
$$|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) \leq |-a| + |-b| = |a| + |b|.$$
Donc c'est vrai pour tout a, b. □

Exemple 1.10. Démontrons que $|x| \leq 3$ implique que $|x - 5| \leq 8$.

Bien : soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leq 3$.
$$\begin{aligned} |x - 5| &= |x + (-5)| \\ &= \leq |x| + |-5| \quad \text{par l'inégalité triangulaire} \\ &= |x| + 5 \\ &\leq 3 + 5 \quad \text{par hypothèse} \qquad = 8. \end{aligned}$$

8. Dans ce cours, on ne vous permet pas le raccourci d'écrire une seule prevue avec des $\Leftrightarrow$ partout, car l'objectif est d'apprendre à construire et à justifier des bonne preuves, et de s'habituer à l'exigeance de logique et de rationnalité dans tout ce qu'on écrit.

Remarque 1.11. Par contre, on ne peut pas conclure l'inverse ! C-à-d, ce n'est pas vrai que $|x-5| \leq 8$ entraine que $|x| \leq 3$.

Pourquoi pas ?

Bien : le fait que $|x-5| \leq 8$ et que $|x-5| \leq |x|+5$ n'implique logiquement ni que $|x|+5 \leq 8$, ni que $8 \leq |x|+5$. (Trouver des exemples !) La piège ici, c'est d'imaginer que c'est un cas de la transitivité de $<$ tandis que ce ne l'est pas.

1.2.3 Exercices

1. Démontrer les faits (évidents !) suivants concernant la relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$, à partir des 9 axiomes plus R1 à R4.
   (a) $1 > 0$,
   (b) $-1 < 0$,
   (c) Si $x \in \mathbb{Q}_{>0} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$, alors $-x \in \mathbb{Q}_{<0}$ et $x^{-1} \in \mathbb{Q}_{>0}$,
   (d) Si $x \in \mathbb{Q}_{<0}$ alors $-x \in \mathbb{Q}_{>0}$ et $x^{-1} \in \mathbb{Q}_{<0}$,
   (e) Si $x > 1$ alors $0 < x^{-1} < 1$,
   (f) Si x, y sont tous les deux positifs, ou tous les deux négatifs, alors xy est positif. Par contre, si $x < 0$ et $y > 0$ alors $xy < 0$.
2. Le(s)quel(s) des énoncés suivants sont vrais ? Corriger les énoncés qui sont faux.
   (a) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, si $x > y$ alors $x^2 > y^2$.
   (b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $(x+y)^2 = x^2 + y^2$.
   (c) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+y^2} = |x| + |y|$.
   (d) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, si $x > y$ alors $|x| > |y|$.
   (e) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, si $x > y$ alors $|y - x| < |y|$.
   (f) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a > 0$ et $b > 0$, $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
   (g) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, et tout $n \in \mathbb{N}$, $(x+y)^n = x^n + y^n$.
3. (Au delà de ce cours) Démontrer que l'ensemble $\{0, 1\}$, muni des opérations binaires de logique $1+1=0$ et $1 \times 1 = 1$ est un corps. Démontrer qu'il n'est pas ordonné. (Conseil : supposer $1 > 0$ et puis appuyer les axiomes d'ordre pour tirer une contradiction ; de même avec l'hypothèse $1 < 0$, d'où l'impossibilité de définir un ordre.)
4. (Au delà de ce cours) Démontrer que $\mathbb{C}$ n'est pas un corps ordonné. (Conseil : si $i > 0$ alors $i^2 > 0$ selon les propriétés d'ordre ...)
5. Démontrer à partir de la définition que $|-x| = |x|$.
6. Démontrer à partir des axiomes que $2 > 1$, qu'alors $\frac{1}{2} < 1$, et qu'alors pour tout $x > 0$, $0 < x/2 < x$.
7. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $|a| < \varepsilon$. Déduire que $a = 0$.
8. Démontrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|x+y| \geq |x| - |y|$ et $|x-y| \geq ||x| - |y||$.
9. Démontrer que $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$.
10. Trouver tout x tel que $x^3 < x$.
11. Démontrer que pour $a > 0$, on a $|x| < a$ ssi $-a < x < a$ (ce qui est équivalent à dire $x \in (-a, a)$).
12. Démontrer aussi que $|x| \leq a$ équivaut $x \in [-a, a]$.

1.3 La notion d'un suprémum d'un ensemble, et le théorème de complétude de $\mathbb{R}$

Notre objectif est de comprendre l'énoncé du théorème suivant :

Théorème : $\mathbb{R}$ est l'unique corps ordonné qui contient $\mathbb{Q}$ (et dont ses opérations étendent celles de $\mathbb{Q}$) tel que tout sous-ensemble non-vide qui est borné supérieurement admet un suprémum (en $\mathbb{R}$).

Que c'est un corps ordonné veut dire qu'il satisfait nos axiomes A1 à A4, M1 à M4, D1 et R1 à R4. Qu'il satisfait cette propriété de complétude prend un peu de travail.

1.3.1 La grande variété de sous-ensembles de $\mathbb{R}$

Imaginons quelques ensembles de nombres réels.

$$\begin{aligned} E_1 &= [1,5] & E_2 &= (1,5) \\ E_3 &= (43,\infty) & E_4 &= \{1,5\} \\ E_5 &= (0,2)\cup[4,6]\cup\{11\} & E_6 &= \{\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}_+\} \\ E_7 &= \mathbb{N} & E_8 &= \{1-\frac{1}{n^2} \mid n\in\mathbb{N}_+\} \end{aligned}$$

On a aussi des ensembles plus bizarres :

$$\begin{aligned} E_9 &= \{x\in[1,3] \mid \text{son expansion décimale ne consiste de 1s et de 2s}\} \\ E_{10} &= \{\frac{p-1}{p} \mid p \text{ est un nombre premier}\}, \end{aligned}$$

et quelques qui sont vraiment horribles :

$$\begin{aligned} E &= \{\sin(x) \mid x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\} \\ E &= \{x\in(0,1) \mid x \text{ est une somme de fractions distinctes de la forme } \frac{1}{m}\} \\ E &= \{x\in(0,1) \mid x \text{ n'est pas la racine d'un } p(x)\in\mathbb{Z}[x]\} \\ E &= \text{une liste particulière (mais infini) de nombres réels entre 0 et 1} \\ E &= \text{un ensemble de Cantor.} \end{aligned}$$

En effet, on n'est limité que par notre imagination.

La question simple qu'on se pose aujourd'hui, et qui admet une réponse très profonde, est :

1.3.2 Est-ce que tout ensemble contient un élément maximal ?

On considère nos exemples, et on voit que la réponse est "non". Par exemple, E_3 et E_7 ont des éléments qui tendent vers l'infini. Alors un premier pas est la définition suivante.

Définition 1.12. Un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ est dit *borné supérieurement* ou *majoré* s'il existe un nombre $s \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$ on a $s \geq x$. Dans ce cas, s est dit *une borne supérieure de* E.

Exemple 1.13. Par exemple, $s = 10$ est une borne supérieure de E_1 car si $x \in E_1$, on a $1 \leq x \leq 5$ et donc $x \leq 5 < 10$; mais en effet, $s = 123$ est aussi une borne supérieure de E_1. Tout $s \geq 5$ est une borne supérieure de E_1.

De même, $s = 5, 10$ ou 123 sont des bornes supérieures de E_2.

Mais $s = 10$ n'est pas une borne supérieure de E_5, car $x = 11 \in E_5$ et $11 > 10$.

Exemple 1.14. L'ensemble vide est borné supérieurement par tout nombre !

Remarque 1.15. On remarque que si E contient un élément maximal m, alors m est une borne supérieure de E. Par contre, pas toute borne supérieure de E est un élément maximal.

Alors, parmi les exemples E_1 à E_{10}, les ensembles qui sont bornés supérieurement sont uniquement :

$$E_1, E_2, E_4, E_5, E_6, E_8, E_9, E_{10}.$$

On raffine notre question.

1.3.3 Est-ce que tout ensemble non-vide qui est borné supérieurement contient un élément maximal ?

Maintenant, c'est une question plus intéressante. Dans le cas de E_2, on aimerait dire que 5 est l'élément maximal ; mais $5 \notin E_2$. On a $4.9 \in E_2$, mais ce n'est pas l'élément maximal car $4.93 \in E_2$ et $4.93 > 4.9$.

Démontrons que E_2 n'admet pas d'élément maximal, en supposant par contradiction que $m \in S$ en est un. Donc puisque $3 \in E$ (par exemple) on a $m \geq 3$. Et puisque $m \in S$, on a $m < 5$. Donc

$$3 \leq m = \frac{2m}{2} < \frac{m+5}{2} < \frac{10}{2} = 5$$

et alors $\frac{m+5}{2} \in E_2$ strictement plus grand que m, ce qui contredit que m était l'élément maximal. Or : E_2 n'a pas d'élt maximal !

C'est frustrant ! C'est évident que 5 est important, mais on n'a pas un mot pour exprimer sa rôle vis-à-vis l'ensemble E_2. En effet, 5 est une borne supérieure — mieux, la *plus petite* borne supérieure — de E_2. Voilà !

1.3.4 Comment préciser la notion de "la plus petite borne supérieure" ?

La notion qu'on cherche à préciser : s est la plus petite borne supérieure de E ssi

(a) s est une borne supérieure de E et

(b) si $t < s$ alors t n'est pas une borne supérieure de E.

En langue mathématique, (a) est équivalent à

$$\forall x \in E, \quad x \leq s.$$

Pour (b) : comment constate-on que t n'est pas une borne supérieure de E ? Rappel : la négation logique de $\forall x \in E, x \leq t$ est

$$\exists x \in E, \ t.q. \ x > t.$$

Donc (b) s'écrit

$$\forall t < s, \exists x \in E \ t.q. \ t < x.$$ [9]

C'est parfait !

1.3.5 La définition du suprémum d'un ensemble

Définition 1.16. Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble borné supérieurement. Alors $s \in \mathbb{R}$ est dit *la plus petite borne supérieure de* E ou *le suprémum de* E, et on écrit $s = \sup(E)$, si :

(a) $\forall x \in E$, $x \leq s$, et

(b) $\forall t < s$, $\exists x \in E$ $t.q.$ $t < x$.

Exemple 1.17. Si E contient un élément maximal m, alors m est une borne supérieure de E, donc satisfait la condition (a) ; et si $t < m$, alors $m \in E$ est un élément de E qui est strictement plus grand que t, or (b) est satisfaite. Donc $\sup(E) = m$.

Donc par exemple, $\sup([0,5]) = 5$, $\sup(\{1,5\}) = 5$, $\sup(E_5) = 11$, $\sup\{E_6\} = \sup\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\} = 1$, $\sup(E_9) = 2.\overline{2} = \frac{20}{9}$.

Exemple 1.18. On a aussi démontré que $\sup(E_2) = 5$: 5 est une borne supérieure, et tout nombre plus petit que 5 ne l'est pas. Donc $\sup((0,5)) = 5$.

Plus généralement, pour tout $a < b$ on a

$$\sup((a,b)) = \sup([a,b]) = \sup([a,b)) = \sup((a,b]) = b.$$

Exemple 1.19. Soit $E = E_8 = \{1 - \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}_+\} = \{0, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \cdots\}$. Démontrons que $\sup(E) = 1$.

On doit démontrer que les deux conditions du sup sont satisfaites.

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}_+$, on a $\frac{1}{n^2} > 0$, alors $1 - \frac{1}{n^2} < 1$. Donc tout élément $x \in E$ satisfait $x < 1$, et 1 est une borne supérieure de E.

(2) Soit $t < 1$ un nombre réel. *(Mon brouillon : je veux un n tel que $1 - \frac{1}{n^2} > t$. J'isole le n : $n^2 > \frac{1}{1-t}$ ou $n > \sqrt{\frac{1}{1-t}}$.)* Alors $\frac{1}{1-t} > 0$. Choisir $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \sqrt{\frac{1}{1-t}} > 0$. Il en suit que $n^2 > \frac{1}{1-t}$, ou bien $1 - t > \frac{1}{n^2}$, or $t < 1 - \frac{1}{n^2} \in E$, CQFD.

On conclut que $s = 1$ est le suprémum, ou la plus petite borne supérieure, de E.

9. Important : rappel qu'ici, logiquement le choix de x dépend sur le choix de t, et donc il ne faut pas intervertir l'ordre de "$\forall t < s$" et "$\exists x \in E$".

Exemple 1.20. Démontrer que si $E = \{x \in (0,1) \mid x \in \mathbb{Q}\}$ alors $\sup(E) = 1$.

Solution : (a) Si $x \in E$, alors $0 < x < 1$, donc c'est vrai que 1 est une borne supérieure de E.

(b) Soit $t < 1$. Il faut démontrer qu'il existe un $x \in E$ tel que $t < x < 1$. Bien, si $t < 0$ on pourrait choisir $x = \frac{1}{2} \in E$. Autrement, l'expansion décimale de t est de la forme $0.a_1a_2a_3\cdots$ (où chaque a_i représente un chiffre du développement décimal de t), puisque $t \in [0,1)$. Puisque $0.99999\cdots = 1$, on sait que pas tout les a_i sont 9. Donc il existe un chiffre, disons a_n, qui n'est pas 9 ; soit $b = a_n + 1$. Posons $x = 0.a_1a_2\cdots a_{n-1}b$. Alors $x \in \mathbb{Q}$, $x \in (0,1)$ et $x > t$. CQFD.

Donc $\sup(E) = 1$.

Exemple 1.21. Démontrer que si $E = (-10,-5) \cup (-4,-3)$ alors $\sup(E) = -3$.

Solution : (a) Si $x \in E$, alors soit $-10 < x < -5 < -3$ ou $-4 < x < -3$. Dans les deux cas, $x < -3$. Donc -3 est une borne supérieure de E.

(b) Soit $t < -3$. Si $t < -4$, on peut prendre $x = -3.5$, car alors $x \in E$ et $x > t$. Autrement, posons $x = \frac{1}{2}(t-3)$, qui est la moyenne de t et -3. Donc $-4 \leq t < x < -3$, alors $x \in E$ et $x > t$. CQFD.

Donc $\sup(E) = -3$.

Notons que dans cet exemple, on n'a pas dû prendre en compte le reste de l'ensemble E ; la preuve se fait uniquement avec les éléments qui sont "proches" au suprémum.

Lemme 1.22. *Soit E un ensemble non-vide, et $s \in \mathbb{R}$. Alors la condition*

$$\forall t < s \quad \exists x \in E \text{ t.q. } t < x$$

est équivalente à la condition

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E \text{ t.q. } s - \varepsilon < x.$$

Démonstration. Il faut faire deux démonstrations, pour démontrer les deux sens de l'inégalité.

$\Rightarrow$: Supposons que c'est vrai que $\forall t < s \quad \exists x \in E$ *t.q.* $t < x$. Il faut démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $x \in E$ tel que $s - \varepsilon < x$. Alors : soit $\varepsilon > 0$. Posons $t = s - \varepsilon$. Par notre hypothèse, $\exists x \in E$ tel que $x < t = s - \varepsilon$, CQFD.

$\Leftarrow$: Supposons que c'est vrai que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E$ *t.q.* $s - \varepsilon < x$. Il faut démontrer que pour tout $t < s$, il existe un $x \in E$ tel que $t < x$. Alors : soit $t < s$. Alors $s - t > 0$. Posons $\varepsilon = s - t$; donc $\varepsilon > 0$. Donc par notre hypothèse, $\exists x \in E$ tel que $x < s - \varepsilon = s - (s-t) = t$, CQFD. $\square$

Exemple 1.23. Démontrer, avec le critère du lemme, que si $E = \{\frac{3n+1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ alors $\sup(E) = 3$.

Solution : Avant de commencer, il faudra simplifier l'expression des termes de E afin de les bien comprendre. On a

$$\frac{3n+1}{n+1} = \frac{3(n+1)-3+1}{n+1} = 3 - \frac{2}{n+1}$$

et alors c'est claire que 3 devrait être le suprémum.

Démonstration : (a) Si $x \in E$, alors il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = 3 - \frac{2}{n+1}$. Puisque $n \geq 0$, $2/(n+1) > 0$, or $-2/(n+1) < 0$ et donc $3 - 2/(n+1) < 3$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Après un peu de travail sur notre brouillon, on réalise que si on choisi un nombre naturel n avec la propriété que $n > 2/\varepsilon - 1$ (qu'on peut faire, puisque $\mathbb{N}$ n'est pas borné supérieurement !), alors $n + 1 > 2/\varepsilon$, qui implique (pusique $\varepsilon > 0$ et $(n + 1) > 0$) que $\varepsilon > 2/(n + 1)$. Donc $-\varepsilon < -2/(n + 1)$, qui donne $3 - \varepsilon < 3 - 2/(n + 1)$. Le nombre $x = 3 - 2/(n + 1)$ est donc un élément de E qui satsifait $3 - \varepsilon < x$, CQFD.

Donc $\sup(E) = 3$.

Et maintenant : pour l'exemple clef, qui explique pourquoi qu'on a fait cette grande histoire.

Exemple 1.24. Soit $E = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$. C'est un ensemble de nombres rationnels, et on a démontrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Est-ce que $\sup(E) = \sqrt{2}$? Ceci impliquerait que que $\mathbb{Q}$ admet des sous-ensembles dont leur suprémum n'est pas dans $\mathbb{Q}$ – ou bien, que $\mathbb{Q}$ a des trous sérieux.

Bien : (a) par définition, $x \in E$ implique que $x < \sqrt{2}$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Si $\varepsilon > 1$ posons $x = 1$; alors $x \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{2} - \varepsilon < \sqrt{2} - 1 < x$; cqfd. Autrement, soit $0.a_1a_2a_3\cdots$ l'expansion décimale de ε, où chaque a_i représente un chiffre. Alors puisque $\varepsilon > 0$, il existe un premier chiffre nonnul ; soit a_n. Alors il suit que $10^{-n} \leq \varepsilon$. Soit $1.41421356237\cdots$ l'expansion d'ecimale de $\sqrt{2}$. Soit x le nombre rationnel formé des premiers n chiffres décimales de $\sqrt{2}$; c-à-d, si $n = 4$ on prend $x = 1.4142$. Alors $x < \sqrt{2}$ et $x \in \mathbb{Q}$ donc $x \in E$. De plus, par construction, $\sqrt{2} - x < 10^{-n} < \varepsilon$, or $\sqrt{2} - \varepsilon < x$, cqfd.

Donc $\sqrt{2} = \sup(E)$.

1.3.6 Exercices

1. Donner un exemple d'un ensemble qui admet un suprémum mais qui n'admet pas d'élément maximal.
2. Démontrer que la condition (b) *ne suffit pas pour définir le suprémum*, on donnant un contre-exemple. C-à-d : trouver un E nonvide et un $s \neq \sup(E)$ tel que $\forall t < s, \exists x \in E\ t.q.\ x > t$.
3. Soit $E = \emptyset$ l'ensemble vide. Démontrer (en suivant précisement la définition) que E est borné supérieurement. Qu'aimeriez-vous dire est son suprémum ? (Donc en générale on exclus l'ensemble vide de nos discussions car c'est un peu bête.)
4. Définir une borne inférieure d'un ensemble, et l'infimum (ou : la plus grande borne inférieure) d'un ensemble non-vide. On écrit $t = \inf(E)$ pour l'infimum t d'un ensemble E.
5. Soit $a < b$ en $\mathbb{R}$ et soit E un des ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} && \text{l'invervalle ouvert} \\
(a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} && \text{un intervalle demi-ouvert} \\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} && \text{un autre intervalle demi-ouvert} \\
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} && \text{l'intervalle fermé.}
\end{aligned}$$

   Démontrer que $\sup(E) = b$ et $\inf(E) = a$.
6. Soit E un ensemble borné supérieurement et soit $-E = \{-x \mid x \in E\}$. Démontrer que $\inf(-E) = -\sup(E)$.

7. Trouver le suprémum et l'infimum des ensembles suivants (s'ils existent). Déterminer dans chaque cas si $\sup(E) \in E$ ou si $\inf(E) \in E$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixe. $E = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{N}, q \neq 0, p + q = n\}$
   (b) $E = \{x \mid x^2 < 16\}$
   (c) $E = \{x \mid x^2 < -1\}$
   (d) $E = \{x \mid (x^2 + 1)^{-1} > \frac{1}{2}\}$
   (e) $E = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 < 7\}$
   (f) $E = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x^2 < 7\}$
   (g) $E = \{x \mid |2x + 3| < 7\}$
8. Démontrer les énoncés suivants, pour tous ensembles bornés E, F de nombres réels :
   (a) si $E + F = \{x + y \mid x \in E, y \in F\}$ alors $\sup(E + F) = \sup(E) + \sup(F)$.
   (b) si $E \cup F = \{x \mid x \in E \text{ ou } x \in F\}$ (la réunion de E et F) alors $\sup(E \cup F) = \max\{\sup(E), \sup(F)\}$
   (c) si $E \cap F = \{x \mid x \in E \text{ et } x \in F\}$ (l'intersection de E et F) alors $\sup(E \cap F) \leq \min\{\sup(E), \sup(F)\}$. Donner un exemple pour démontrer que c'est possible que ce n'est pas une égalité.

1.4 Les nombres réels

1.4.1 La définition intrinsèque de $\mathbb{R}$

Théorème 1.25 (Thórème de complétude). [10]

$\mathbb{R}$ est l'unique corps ordonné et normé qui contient $\mathbb{Q}$ (et dont ses opérations étendent celles de $\mathbb{Q}$) tel que tout sous-ensemble non-vide qui est borné supérieurement admet un suprémum (en $\mathbb{R}$).

Cette dernière condition explique, finalement, pourquoi qu'on a dû ajouter tant de nombres à $\mathbb{Q}$ — on a voulu remplir tous les trous qui apparaissent dans $\mathbb{Q}$ quand on commence à penser aux supréma d'ensembles.

Exemple 1.26. Soit x un nombre réel à expansion décimal $a.a_1a_2a_3a_4\cdots$. Soit

$$E = \{a, a.a_1, a.a_1a_2, a.a_1a_2a_3, \ldots\}.$$

Alors $E \subseteq \mathbb{Q}$ et x est une borne supérieure de E. En effet, c'est la plus petite borne supérieure : si $\varepsilon > 0$, choisir n tel que $10^{-n} < \varepsilon$ (exercice du prochain chapitre). Alors

$$x - a.a_1a_2\cdots a_n = 0.00\cdots 00a_{n+1}a_{n+2}\cdots < 10^{-n} < \varepsilon$$

or $x - \varepsilon < a.a_1a_2\cdots a_n \in E$, CQFD.

10. Cette dernière partie est aussi dit : qui possède la propriété du suprémum, ou également, qui est *complet par rapport à la valeur absolue* pour des raisons qui deviendront plus claire au chapitre suivant.

Donc chaque élément de $\mathbb{R}$ est le suprémum d'un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$. Alors le corps décrit dans la boîte ci-haut est *au moins* $\mathbb{R}$.

Par contre, on n'a pas démontré que $\mathbb{R}$ *suffit*. C'est un travail pour MAT2525 l'année prochaine (ou un exercice ambitieux).

Cette caractérisation bizarre de $\mathbb{R}$ est très utile ! Par exemple, elle nous permet de définir quelques nombres réels sans référence à son expansion décimal.

Exemple 1.27. Soit $x \in \mathbb{R}$ et définir $E = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$. Alors cet ensemble est borné supérieurement (par x). Sont suprémum s'écrit $\lfloor x \rfloor$, la partie entière de x. (Eg : $\lfloor \pi \rfloor = 3$ et $\lfloor -2.5 \rfloor = -3$. En anglais, on dirait plutôt *le plancher* de x.) On remarque que $x - 1 < \lfloor x \rfloor$ car sinon, on aurait $x - 1 \geq \lfloor x \rfloor$ ce qui implique que $x \geq \lfloor x \rfloor + 1 \in \mathbb{Z}$, donc $\lfloor x \rfloor + 1 \in E$, ce qui contredit la propriété du suprémum de E.

Exemple 1.28. Soit $E = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$. C'est borné supérieurement par 2, par exemple. Donc on peut définir $\sqrt{2} := \sup(E)$.

1.4.2 Deux propriétés clefs des entiers

Ni $\mathbb{N}$ ni $\mathbb{Z}$ sont bornés supérieurement. En effet, le fait qu'aucun nombre réel est une borne supérieure de $\mathbb{Z}$ est une propriété fondamentale qu'on donne un nom particulier.

La propriété archimédienne : Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n > x$.

[11]

C'est une propriété évidente et très utile, qu'on appliquera mille fois cette session. On peut l'exprimer de plusieurs façons différents :
– Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.
– Pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$ et pour tout $b \in \mathbb{R}$ il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > b$.
(La démonstration de l'équivalence est un exercice.)

De l'autre sens on a une deuxième propriété fondamental de $\mathbb{N}$.

Le principe de bon ordre : Tout sous-ensemble non-vide de $\mathbb{N}$ a un plus pétit élément.

Il en suit que tout sous-ensemble non-vide et borné de $\mathbb{Z}$ contient un élément maximal et un élément minimal (qui sont donc des entiers).

1.4.3 La densité de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

On a remarqué qu'on a dû ajouter une quantité incroyable de nombres irrationnels à $\mathbb{Q}$ pour obtenir $\mathbb{R}$; ces nombres ont comblé des "trous" dans $\mathbb{Q}$. La question se pose : est-ce qu'il existe des régions dans $\mathbb{R}$ sans éléments de $\mathbb{Q}$ du tout ?

11. On a donné le nom d'Archimèdes à cette propriété parce qu'elle est apparue comme un axiome dans son livre "On the Sphere and Cylinder" (225 av.J-C) ; par contre Archimèdes attribue sa découverte à Eudoxus de Cnidus (qui vivait vers 400 av.J-C) et on la propriété est aussi mentionné dans l'oeuvre "Éléments" de Euclid (vers 300 av.J-C). En fait, le nom "propriété archimédienne" n'était conçu qu'après la découverte de systèmes de nombres qui ne l'avait pas (et donc sont maintenant dits "nonarchimédienne"). Référence : Wikipédia et le magnifique *The MacTutor History of Mathematics archive.*

Théorème 1.29. *Les rationnels sont* dense *en* $\mathbb{R}$. *En autre mots : soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *avec* $a < b$. *Alors il existe un* $r \in \mathbb{Q}$ *tel que* $a < r < b$.

Il en suit qu'entre a et b il existe un nombre infini de nombres rationnels (exercice).

Démonstration. Par la propriété archimédienne, il existe $n \in \mathbb{N}_+$ tel que $0 < \frac{1}{n} < b - a$, or $n(b-a) > 1$ ou $nb - na > 1$. Posons $m = \lfloor na + 1 \rfloor$; alors $na < m \leq na + 1 < nb$. Il suit que

$$a < \frac{m}{n} < b.$$

□

Corollaire 1.30. *Les irrationnels sont dense en* $\mathbb{R}$*, c-à-d, pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$ *avec* $a < b$ *il existe* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *tel que* $a < x < b$.

Démonstration. Par la densité de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$: Soit $r \in \mathbb{Q}$ avec $a < r < b$; et soit $s \in \mathbb{Q}$ avec $r < s < b$. Posons $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(s - r)$. Alors $0 < y < s - r$ et $x = r + y \notin \mathbb{Q}$. Alors

$$a < r < x < s < b.$$

□

1.4.4 La recurrence

Une conséquence importante du principe de bon ordre est une méthode de preuve dite "par induction" ou "par recurrence" [12]. Elle s'applique parfois quand il faut démontrer un énoncé pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme par exemple :

– Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$;
– Pour tout $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$, $n^2 \leq 2^n$;
– Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$, on a $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$.
– Pour tout $n \geq 1$, pour tout $x > -1$, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

La méthode est comme suit :

(1) Démontrer que l'énoncé est vrai pour le premier cas indiqué (par exemple, avec $n = 1$).

(2) Démontrer que **si** l'énoncé est vrai pour une valeur (arbitraire, inconnu) de n, **alors** forcément c'est vrai pour la prochain valeur $(n + 1)$ aussi.

L'idée c'est : imaginons (au contraire) qu'il existait au moins un n pour lequel l'énoncé est faux. Alors l'ensemble d'entiers pour lequel il est faux est non-vide, et donc, par le principe du bon ordre, possède un élément minimal, c-à-d, il existe un contre-exemple minimal, disons N. Par la première étape, $N > 1$ (eg, le premier cas). Par la deuxième étape, le fait que le cas N est faux entraine logiquement que le cas $N - 1$ était déjà faux — une contradiction du fait que N était l'index du contreexemple minimal.

12. Cette méthode fut développé en 1575, dans le travail de Maurolycus [B] ; mais on l'attribue sa découverte typiquement à Blaise Pascal (1623-1662).

En effet :

$$\text{Cas } n = 1 \Rightarrow \text{Cas } n = 2 \Rightarrow \text{Cas } n = 3 \Rightarrow \text{Cas } n = 4 \Rightarrow \cdots$$

1.4.5 Exercices

1. (Au delà du cours) Soit E un ensemble non-vide de nombres réels qui est borné supérieurement. Donc $\sup(E)$ existe. Démontrer que si les éléments de E sont tous exprimable comme décimals (c-à-d, ils son éléments de notre ensemble présumé $\mathbb{R}$) alors $\sup(E)$ s'écrit aussi comme décimal, donc est aussi dans notre version de $\mathbb{R}$. Or : notre $\mathbb{R}$ est exactement le corps minimal contenant $\mathbb{Q}$ ayant la propriété du suprémum. (Conseil : vous pouvez supposer que E contient des éléments > 0. Construisez l'expansion décimal de $\sup(E)$, un chiffre à la fois. La partie entière du sup sera $\max\{\lfloor x \rfloor \mid x \in E\}$, par exemple ; voir Exemple 1.27.)
2. Démontrer (avec l'aide du théorème de complétude) que tout ensemble nonvide de nombres réels qui est borné inférieurement admet un nombre réel comme infimum.
3. Démontrer que la propriété archimdienne est équivalente à "Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$."
4. Démontrer que la propriété archimdienne est équivalente à "Pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$ et pour tout $b \in \mathbb{R}$ il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > b$."
5. Démontrer le principe du bon ordre. Vous pouvez prendre comme acquis que la complétude de $\mathbb{R}$ implique également que tout sous-ensemble non-vide qui est borné inférieurement admit un infimum. Alors, puisque $\mathbb{N}$ est borné inférieurement, il ne vous reste qu'à démontrer que l'infimum d'un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{N}$ est forcément un élément de l'ensemble.
6. Démontrer que les nombres irrationnels ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) sont dense en $\mathbb{R}$, c'est à dire, que pour tout $a < b \in \mathbb{R}$ il existe $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $s \in (a, b)$. Conseil : démontrer par contradiction que puisque $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, il suit que $r\sqrt{2}$ et $r + \sqrt{2}$ sont irrationnels pour tout $r \in \mathbb{Q}$ (mais évidement pas pour tout $r \in \mathbb{R}$!!).
7. Soit $a < b$ deux nombres réels. Démontrer qu'il y a un nombre infini de nombres rationnels entre a et b. Conseil : l'approche directe consiste de donner un algorithme qui produit infiniment de nombres rationnels entre a et b. On peut aussi tenter un argument de contradiction : commencer avec l'hypothèse complémentaire qu'il existe $a < b$ tel qu'il n'existe qu'un nombre fini de rationnels entre eux, et puis déduire une contradiction.
8. Démontrer que pour tout $r \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un $q \in \mathbb{Q}$ tel que $|q - r| < \varepsilon$. Donc tout nombre réel peut être approximé, à n'importe quelle précision, par un nombre rationnel. (C'est évident en pensant aux décimales, mais il nous faut une preuve basé sur la propriété archimédienne, qui est intrinsèque.)

1.5 Exemples de la recurrence

Lemme 1.31. *Démontrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$.

On se rappelle du fait (qu'on peut démontrer par recurrence, si l'on veut, que

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.2}$$

Démonstration. (1) Le cas de base ici est $n = 0$. Les deux expression valent 0, donc sont égales.

(2) Supposons maintenant qu'il existe un $n \geq 0$ pour lequel

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2. \tag{1.3}$$

En utilisant cette hypothèse, il faut démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n+1} k\right)^2.$$

On gribouille un peu sur notre brouillon, et ce qui sort est la chaîne d'égalités suivante :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3 \quad \text{par notre hypothèse de recurrence (1.3)} \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \quad \text{par (1.2)} \\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2\left(n^2 + 4(n+1)\right) \quad \text{factorisant} \\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n+1} k\right)^2 \quad \text{par la relation (1.2).}
\end{aligned}$$

Donc l'étape de recursion est vrai, et donc, par le principe de recurrence mathématique, cette égalité est vrai pour tout $n \geq 0$. □

Lemme 1.32. *Démontrer que pour tout $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$, $n^2 \leq 2^n$.*

Démonstration. (1) Le cas de base ici est $n = 4$. Quand $n = 4$, $n^2 = 16$ et $2^n = 16$, donc $n^2 \leq 2^n$, et c'est vrai.

(2) Supposons qu'il existe un $n \geq 4$ tel que $n^2 \leq 2^n$. En utilisant cette hypothèse, il faut démontrer que

$$(n+1)^2 \leq 2^{n+1}.$$

Bien : après qu'on gribouille un peu, on trouve la chaîne d'inégalités suivantes qui font l'affaire. Ce n'est pas la solution unique.

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \\ &\leq n^2 + 4n \quad \text{car } 2n > 1 \\ &\leq n^2 + n^2 \quad \text{car } n > 4 \\ &\leq 2^n + 2^n \quad \text{par } \textbf{l'hypothèse de recurrence} \\ &= 2^{n+1}.\end{aligned}$$

Donc $n^2 \leq 2^n$ entraine que $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$, et donc cet énoncé est vrai pour tout $n \geq 4$, par le principe de recurrence mathématique. □

Lemme 1.33. *Démontrer que pour tout nombre réel* $r \neq 1$*, et pour tout entier* $n \geq 0$*,*

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

On a deux variables n et r. Par contre, puisque r est en $\mathbb{R}$, la recurrence ne s'applique pas à r — on ne peut faire l'induction que sur n.

Démonstration. (1) Si $n = 0$, la côté gauche vaut 1 et la côté droite vaut $\frac{1-r}{1-r} - 1$, donc c'est vrai.

(2) Supposons alors qu'il existe un $n \geq 0$ pour lequel

$$\forall r \neq 1, \quad \sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Utilisant cette hypothèse, il faut démontrer que [13]

$$\forall r \neq 1, \quad \sum_{i=0}^{n+1} r^i = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}.$$

On gribouille un peu et on trouve :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} r^i &= \left(\sum_{i=0}^{n} r^i\right) + r^{n+1} \\ &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} \quad \text{par l'hypothèse de recurrence} \\ &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + \frac{r^{n+1} - r^{n+2}}{1 - r} \\ &= \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}\end{aligned}$$

CQFD. Donc l'étape d'induction est vrai, et par le principe de recurrence mathématique, l'égalité est vrai pour tout $n \geq 0$. □

13. Remarquer que tout ce qu'on a changé, c'est de remplacer n par $n+1$ partout dans la formule.

Lemme 1.34. *Pour tout $n \geq 0$, pour tout $x > -1$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.*

Démonstration. On fait une preuve par recurrence sur n.

(1) Soit $n = 0$. Alors pour tout $x > -1$, on a $(1+x)^n = 1$ et $1+nx = 1+0 = 1$, donc quand $n = 0$ c'est vrai que $(1+x)^n \geq 1+nx$.

(2) Supposons qu'il existe un $n \geq 0$ pour lequel

$$\forall x > -1, \quad (1+x)^n \geq 1+nx.$$

Utilisant cette hypothèse, il faut démontrer que

$$\forall x > -1, \quad (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x.$$

On procède comme suit :

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\
&\geq (1+x)(1+nx) \quad \text{car } (1+x) > 0, \text{ et l'hypothèse de recurrence} \\
&= 1+x+nx+nx^2 \\
&\geq 1+(n+1)x \quad \text{car } nx^2 > 0.
\end{aligned}$$

Alors l'implication inductive est vrai, et par le principe de recurrence mathématique, l'inégalité est vrai pour tout $n \geq 1$. □

Un corollaire très puissant, qu'on utilisera souvent, est le suivant.

Corollaire 1.35.

(a) Pour tout nombre réel $y > 1$ et tout $b \in \mathbb{R}$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $y^n > b$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $0 < x < 1$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x^n < \varepsilon$.

Démonstration. (a) Soit $y > 1$ et posons $x = y - 1 > 0$. Donc $y = 1 + x$. Choisir, par la propriété archimédienne, $N \in \mathbb{N}$ tel que $Nx > b$; alors pour tout $n \geq N$, on a $nx > b$. En appliquant le Lemme 1.34 on obtient

$$y^n = (1+x)^n \geq 1+nx > nx > b,$$

CQFD.

(b) Si $0 < x < 1$, posons $y = x^{-1} > 1$. De même, $\varepsilon > 0$ donc posons $b = \varepsilon^{-1} \in \mathbb{R}$. Donc par la première partie, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a

$$y^n > b$$

or

$$(x^{-1})^n > \varepsilon^{-1}.$$

Puisque $x^n\varepsilon > 0$, on peut multiplier par $x^n\varepsilon$ pour obtenir

$$\varepsilon > x^n,$$

CQFD. □

Remarque 1.36. On a les faits suivants, qu'on utilisera souvent :

– (propriété archimédienne) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$, et – (Corollaire 1.35) $\forall \varepsilon > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $0 < x < 1$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $x^n < \varepsilon$.

Ces deux faits exprime l'idée que les suites de nombres $\frac{1}{n}$ et x^n, qui ne sont toujours positifs et jamais nuls, tendent vers zéro. Ce sont des exemples classiques de *suites convergentes.*

1.5.1 Exercises

1. Exprimer chacune des expressions suivantes avec la notation Σ pour remplacer la somme imprécise :
   (a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n$
   (b) $2 + 4 + 6 + \cdots + 20$
   (c) $f(-3) + f(-2) + f(-1) + f(0) + \cdots + f(14) + f(16)$
2. Écrire chacune des sommes suivantes au long (avec $\cdots$ si nécessaire) :
   (a) $\sum_{i=0}^{n} i^3$
   (b) $\sum_{i=1}^{k} ki$ (Conseil : c'est i qui est l'index, donc le k est une constante.)
   (c) $\sum_{i=1}^{k} x^i$
   (d) $\sum_{i=3}^{5} \frac{x^{i-3}}{i!}$
3. Démontrer les énoncés suivant avec la recurrence mathématique.
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, si $a_1, \cdots, a_n$ sont n nombres réels arbitraires, alors
   $$|a_1 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$
   (c) $\forall n \in \mathbb{N}$, si $a_1, \cdots, a_n$ sont n nombres réels non-négatifs, alors
   $$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$
   (d) $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i i^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$
   (e) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$
   (f) $\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$

(g) $n! \geq 2^n$ pour tout $n \geq 4$

4. Voici un énoncé :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{(n+2)(n-1)}{2}$$

Démontrer que si c'est vrai pour une valeur de n, alors forcément elle sera vrai pour $n+1$. Donc cet énoncé satisfait l'étape inductive de la recurrence. Par contre : démontrer qu'il n'existe aucune valeur n pour laquelle cet énoncé est vrai. Est-ce que c'est un contre-exemple du principe de recurrence mathématique ?

5. La *factorielle* de $n \in \mathbb{N}$ est définie par

$$0! = 1, \quad \text{et pour tout } n \geq 1, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$, on défini *coefficient binomial* ("*k parmi n*") comme étant

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

(a) Démontrer que les coefficients binomiaux satisfont

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

(C'est facile sans la recurrence mathématique.)

(b) Utiliser la recurrence et (a) afin de démontrer que chaque coefficient binomial est un entier strictement positif. (Conseil : faites la recurrence sur n et démontrer que pour tout k avec $0 \leq k \leq n$ que $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}_{>0}$

(c) Démontrer la *formule du binôme de Newton* par recurrence : *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $ab \neq 0$, on a*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

6. Soit f_n la suite de Fibonnacci. Donc $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pour $n \geq 3$. Démontrer que

(a) $\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n f_{n+1}$

(b) $f_n \geq (3/2)^{n-2}$

(c) $\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$

7. Soit a_n une suite définie par $a_1 = 1$, $a_2 = 8$ et $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ pour $n \geq 3$. Démontrer que $a_n = 3(2^{n-1} + 2(-1)^n$ pour tout n.

Chapitre 2

Les suites

2.1 Les suites : Exemples

Quelques exemples :

- $\{2n\}_{n\geq 0}$ est la suite $0, 2, 4, 6, \ldots$ d'entiers pairs positives
- $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ ou $\{1/n\}_{n\geq 1}$ or $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$, qu'on voit "s'approche" à 0 puisque $n \to \infty$ (mais n'en arrive jamais !).
- $b_n = 1 + \frac{1}{2}n$, $n \geq 0$ ou $\{1 + \frac{1}{2}n\}_{n\geq 0}$
- $c_n = \frac{n}{n+1}$, $n \geq 0$, qui est la suite $\{1 - \frac{1}{n+1}\}_{n\geq 0}$
- $d_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$, $n \geq 1$
- $e_n = (-1)^n$, $n \geq 0$
- $g_n = 2^{-n}$, $n \geq 0$
- $\{(-1)^n \frac{1}{2^n}\}_{n\geq 0}$

On peut définir une suite d'une manière récursive ; par exemple :

- $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pour $n \geq 3$ (la suite de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots$)
- $h_1 = 1$, $h_{n+1} = \frac{h_n^2+2}{2h_n}$ pour $n \geq 2$

ou avec un algorithme :

- $p_n =$ les premiers n chiffres de π : $\{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, \cdots\}$
- $t_n =$ la température à midi du jour n après le 1er janvier 2015

et on n'est même pas forcé de choisir une formule élégante :

- $k_n = \begin{cases} 14 & \text{si } 0 \leq n \leq 5 \\ n^2 + 324n & \text{si } 6 \leq n < 1324 \\ 0 & \text{si } n \geq 1324. \end{cases}$
- $\ell_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ n^2 - n + 1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

Alors, une suite est une liste ordonnée et infini. Ce n'est pas seulement l'ensemble de ses éléments, puisqu'on veut garder l'ordre, et permettre la repétition. En effet, on peut définir une suite de nombres comme étant une fonction des nombres naturels en $\mathbb{R}$.

2.2 La notion de la convergence d'une suite

Définition 2.1. Une *suite* de nombres réels est une fonction

$$a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Normalement, on dénote par a_n la valeur $a(n)$, et on écrit

$$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{ou} \quad \{a_n\}_{n\geq 0}.$$

On se permet aussi de débuter la suite à une valeur $n = N \in \mathbb{N}$.

On a une notion intuitive de la convergence d'une suite. L'écrire précisement — ou même croire en la définition écrite — demande beaucoup de reflexion !

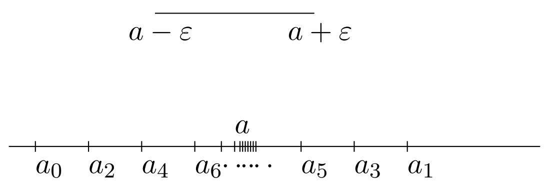


FIGURE 2.1 – Une suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels qui converge vers la limite a : pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ de rayon ε centré sur a ne contient pas toute la suite, mais contient tout élément de la suite après un certain temps.

Définition 2.2. Une suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels *converge* (ou : *est convergente*) s'il existe un nombre réel L tel que

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ t.q.\ \forall n \geq N\ |a_n - L| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, L est dit la limite de la suite, et on écrit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \to L.$$

Si aucun tel $L \in \mathbb{R}$ existe, la suite est dite *divergente.*

Donc, pour démontrer qu'une suite converge vers une certaine valeur L, il faut suivre la définition de la limite exactement, étape par étape :
- La définition commence avec "pour tout" alors notre preuve commence avec "Soit".
- Puis la définition dit "il existe un N" donc on donne un argument (ou plus généralement un calcul) qui génére un N.
- Puis la définition a un autre "pour tout" alors on a fait un "soit $n \geq N$" (ou parfois, tout simplement "$\forall n \geq N$").
- Et puis la définition termine avec une certaine inégalité ; notre preuve doit conclure avec cette inégalité, démontré.

2.2.1 Exemples

Exemple 2.3. Soit $a_n = 5 + \frac{3}{n}$. Démontrons que $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$.

> Brouillon :
> $$|a_n - L| = |(5 + \frac{3}{n}) - 5| = \frac{3}{n}$$
> Si on veut $\frac{3}{n} < \varepsilon$ il faut choisir $3 < n\varepsilon$ ou $n > 3/\varepsilon$. Et si on trouve un n pour quel c'est vrai, c'est vrai pour tout n plus grand. Parfait !

Dém : Soit $\varepsilon > 0$. Choisir, par la propriété archimédienne, $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > 3/\varepsilon$. Soit $n \geq N$. Alors

$$\begin{aligned}
|a_n - L| &= |5 + \frac{3}{n} - 5| \\
&= |3/n| \\
&= 3/n \quad \text{puisque } n > 0 \\
&\leq 3/N \quad \text{puisque } n \geq N \\
&< \varepsilon \quad \text{puisque } N > 3/\varepsilon \text{ implique } N\varepsilon > 3 \text{ ou } 3/N < \varepsilon.
\end{aligned}$$

CQFD.

Exemple 2.4. La suite $\{p_n\}_{n\geq 0} = \{3, 3.1, 3.14, 3.141, \cdots\}$ a été construit exactement afin de converger à la limite π. Pour voir ceci, notons que par construction $0 < \pi - p_n < 10^{-n}$. Maintenant on fait la démonstration (avec $L = \pi$) que la suite $\{p_n\}$ converge vers π :

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Par Corollaire 1.35, puisque $0 < 10^{-1} < 1$ il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $(10^{-1})^n < \varepsilon$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a

$$|\pi - p_n| < 10^{-n} = (10^{-1})^n < \varepsilon$$

CQFD.

Exemple 2.5. Soit $a_n = \frac{2n}{n+1}$. Démontrons que $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

> Brouillon :
> $$|a_n - L| = |\frac{2n}{n+1} - 2| = |\frac{2n - 2(n+1)}{n+1}| = |\frac{-2}{n+1}| = \frac{2}{n+1}$$
> Donc si on veut que ça soit $< \varepsilon$, il faut choisir n tel $2/(n+1) < \varepsilon$ ou bien $2 < \varepsilon(n+1)$ ou $n + 1 > 2/\varepsilon$ ou $n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$.

Dém : Soit $\varepsilon > 0$. Choisir, par la propriété archimédienne, un $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \frac{2}{\varepsilon} - 1$. Alors pour tout $n \geq N$ on a

$$\begin{aligned}
|\frac{2n}{n+1} - 2| &= |\frac{-2}{n+1}| \\
&= \frac{2}{n+1} \\
&\leq \frac{2}{N+1} \quad \text{puisque } n \geq N \\
&< \varepsilon \quad \text{puisque } N > \frac{2}{\varepsilon} - 1 \text{ implique } \frac{2}{N+1} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

CQFD.

Exemple 2.6. Soit $a_n = \sqrt{2 + \frac{1}{n}}$ pour tout $n \geq 1$. Démontrons que la limite est $\sqrt{2}$.[1]

On veut $|\sqrt{2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{2}| < \varepsilon$. On utilise le conjugué ; on aimerait donc

$$\frac{(2 + \frac{1}{n}) - 2}{\sqrt{2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{2}} < \varepsilon \tag{2.1}$$

Il faudra trouver un n pour lequel c'est vrai. Résoudre pour n est difficile ; mais voyons :

$$\sqrt{2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{2} > 1 + 1 = 2$$

(par exemple) puisque $2 + \frac{1}{n} \geq 2$ et $\sqrt{2} > 1$. Donc il suffit de choisir n pour que le numérateur soit plus petit que 2ε ! (Notez : nous ne disons PAS que TOUTE solution à (2.1) est donné en choisissant $\frac{1}{n} < 2\varepsilon$; nous disons seulement que SI on choisit $\frac{1}{n} < 2\varepsilon$ ALORS (2.1) est vrai.

Dém : Soit $\varepsilon > 0$. Par la propriété archimédienne, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{N} < 2\varepsilon$. Donc, pour tout $n \geq N$, nous avons

$$\begin{aligned}
|\sqrt{2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{2}| &= \frac{(2 + \frac{1}{n}) - 2}{\sqrt{2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{2}} \quad \text{en multipliant par } \frac{x}{x}, \text{ où } x \text{ est le conjugué} \\
&= \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{2}} \\
&< \frac{\frac{1}{n}}{2} \quad \text{puisque } \sqrt{2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{2} > 2 \\
&< \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

CQFD.

1. Plus tard, on démontrera que (a) $f(x) = \sqrt{x}$ est une fonction continue et (b) que si f est continue, et $a_n \to L$, alors $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$. Mais dans ce cours on est en train de démontrer ces faits que tout le monde nous dit sont vrais.

Exemple 2.7. Trouver la limite de la suite $\left\{\dfrac{4n^2-3n+2}{2n^2+2n-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

On commence en simplifiant ; c'est une fonction rationnel de n tel que le degré du numérateur est (plus grand ou) égale au degré du dénominateur, alors on peut faire la division de polynômes :

$$\begin{array}{rl} 4n^2-3n+2 & \big)\underline{2n^2+2n-1} \\ -(\underline{4n^2+4n-2}) & \quad 2 \\ -7n-4 & \end{array}$$

qui implique

$$\frac{4n^2-3n+2}{2n^2+2n-1} = 2 - \frac{7n+4}{2n^2+2n-1}.$$

Donc, on devrait croire que la limite est 2. Démontrons ceci.

On a

$$\left|\left(2-\frac{7n+4}{2n^2+2n-1}\right)-2\right| = \frac{7n+4}{2n^2+2n-1}$$

On ne veut certainement pas tenter de resoudre $\frac{7n+4}{2n^2+2n-1}=\varepsilon$! Mais puisqu'on veut arriver à la conclusion que cette fraction est $<\varepsilon$, considérons

$$\frac{7n+4}{2n^2+2n-1} \le \frac{7n+4n}{2n^2+2n-1} < \frac{11n}{2n^2} = \frac{11}{2n}.$$

Pour la première inégalité, on a utilisé le fait que $7n+4 \le 7n+4n$ puisque $n \ge 1$. Pour la deuxième, on a vu que $2n-1>0$, alors $2n^2+2n-1 > 2n^2$. Donc la fraction à droite a un dénominateur plus petit, donc représente un nombre plus grand (puisque tout est positif).
Et là, c'est rendu très facile de resoudre le problème !

Soit $\varepsilon > 0$. Choisir $N \in \mathbb{N}$ par la propriété archimédienne tel que $N > \frac{11}{2\varepsilon}$. Alors soit $n \ge N$. On calcule :

$$\begin{aligned} \left|\left(\frac{4n^2-3n+2}{2n^2+2n-1}\right)-2\right| &= \left|\left(2-\frac{7n+4}{2n^2+2n-1}\right)-2\right| \\ &= \frac{7n+4}{2n^2+2n-1} \\ &\le \frac{7n+4n}{2n^2+2n-1} \quad \text{car } 4 \le 4n \\ &< \frac{11n}{2n^2} \quad \text{car } 2n-1>0 \\ &= \frac{11}{2n} \\ &\le \frac{11}{2N} \quad \text{car } n \ge N \\ &\le \frac{11}{2(11/(2\varepsilon))} \quad \text{car } N > 11/(2\varepsilon) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

CQFD.

Exemple 2.8. Soit $y > 0$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{y} = 1$. (Veuillez prendre comme définition que pour $y > 0$, $z = \sqrt[n]{y}$ si et seulement si $z^n = y$ et $z > 0$.)

> Nous allons commencer avec une valeur $\varepsilon > 0$ et nous voulons arriver à choisir un n tel que
> $$|\sqrt[n]{y} - 1| < \varepsilon$$
> ou bien
> $$-\varepsilon < \sqrt[n]{y} - 1 < \varepsilon$$
> ou encore
> $$1 - \varepsilon < \sqrt[n]{y} < 1 + \varepsilon.$$
> On aimerait prendre la $n$ième puissance des trois termes — mais voyons que si $1-\varepsilon < 0$ ça ne préserve pas toujours l'inégalité. (Pensez à $-10 < 2$; $(-10)^2 \not< 2^2$.)
> .... alors, supposons pour l'instant que $\varepsilon < 1$. (Pas de problème : si on peut trouver un N qui fait l'affaire pour 1, qui est plus petit que ε, c'est parfait.)
> Alors, si $\varepsilon \leq 1$ nous avons
> $$(1-\varepsilon)^n < y < (1+\varepsilon)^n.$$
> On applique Corollaire 1.35.
> Puisque $1 + \varepsilon > 1$, il existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $(1+\varepsilon)^n > y$.
> De même, puisque $0 \leq 1 - \varepsilon < 1$, et $y > 0$, il existe un $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, nous avons $(1-\varepsilon)^n < y$.
> Parfait ! On sera capable de trouver le N qu'il nous faut.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\varepsilon' = \min\{1, \varepsilon\}$; alors $\varepsilon' \leq \varepsilon$ et $\varepsilon' \leq 1$.

Puisque $1 + \varepsilon' > 1$, il existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $(1+\varepsilon')^n > y$.

Puisque $0 \leq 1 - \varepsilon' < 1$, et $y > 0$, il existe un $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $(1-\varepsilon')^n < y$.

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. Alors pour tout $n \geq N$, nous avons

$$(1-\varepsilon')^n < y < (1+\varepsilon')^n.$$

Tous ces termes son ≥ 0 donc on peut prendre la $n$ième racine, et ça préserve les inégalités :

$$1 - \varepsilon' < \sqrt[n]{y} < 1 + \varepsilon'$$

or

$$|\sqrt[n]{y} - 1| < \varepsilon' \leq \varepsilon$$

CQFD. □

Alors les suites convergentes sont très intéressants. Il y a quelques suites divergentes qui nous intéressent aussi (du point de vue de Calcul différentiel).

2.2.2 Suites divergentes

Une suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si

$$\exists L \in \mathbb{R}\; t.q.\; \forall \varepsilon > 0\; \exists N \in \mathbb{N}\; t.q.\; \forall n \geq N,\; |a_n - L| < \varepsilon.$$

Donc la suite est *divergente* si

$$\forall L \in \mathbb{R}\; \exists \varepsilon > 0\; t.q.\; \forall N \in \mathbb{N}\; \exists n \geq N\; t.q.\; |a_n - L| \geq \varepsilon.$$

Exemple 2.9. Soit $a_n = (-1)^n$, pour tout $n \geq 0$. Donc il s'agit de la suite $\{1, -1, 1, -1, \cdots\}$. Démontrons qu'elle diverge.

Supposons au contraire qu'il existait un $L \in \mathbb{R}$ qui était sa limite.

> Brouillon : la contradiction devrait venir du fait que convergence exige que 1 et -1 sont ε-proche à L, mais si ε est assez petit c'est impossible. Avec l'aide d'un dessin, on voit que $\varepsilon = 1$ suffit (mais on aurait pu choisir en ε encore plus petit).

Posons $\varepsilon = 1$. Puisque $a_n \to L$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|a_n - L| < \varepsilon$. En choisissant n pair et impair, respectivement, on conclut

$$|L - 1| < 1 \quad \text{et} \quad |L + 1| < 1.$$

Mais alors on a à la fois

$$0 < L < 2 \quad \text{et} \quad -2 < L < 0$$

ce qui dit que $L < 0$ et $L > 0$, une contradiction. Donc c'est une suite divergente.

Il y a un certain type de divergence qui est très intéressant.

Définition 2.10. Soit $\{a_n\}$ une suite de nombres réels. On dit que $\{a_n\}$ diverge vers l'infini, écrit $a_n \to \infty$ ou $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, si

$$\forall M \in \mathbb{N}\; \exists N \in \mathbb{N}\; t.q.\; \forall n \geq N\; a_n > M.$$

De même, on dit que $\{a_n\}$ diverge vers moins infini, écrit $a_n \to -\infty$ ou $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, si

$$\forall M \in \mathbb{N}\; \exists N \in \mathbb{N}\; t.q.\; \forall n \geq N\; a_n < -M.$$

Remarque 2.11. Une telle suite ne *converge* pas vers $\pm\infty$; voyons qu'on ne peut même pas appuyer la définition de "convergente" avec "$L = \infty$" puisque $\pm\infty$ ne sont pas des nombres réels. C'est une extension commode de la notation et ne peut pas causer de confusion.

Exemple 2.12. Démontrons que $a_n = n$ diverge vers ∞, tandis que $b_n = -2^n$ diverge vers $-\infty$, et $c_n = (-2)^n$ diverge, mais ni vers ∞, ni vers $-\infty$.

Soit $a_n = n$. Soit $M \in \mathbb{N}$. Posons $N = M$. Alors pour tout $n \geq N$, nous avons $a_n = n \geq N = M$, CQFD.

Soit $b_n = -2^n$. Soit $M \in \mathbb{N}$. On remarque que pour tout $n \geq 1$, $n < 2^n$ (preuve par recurrence, exercice). Posons $N = M$. Alors pour tout $n \geq N$, nous avons $b_n = -2^n < -n \leq -N = -M$, CQFD.

Soit $c_n = (-2)^n$. Alors c_n ne diverge pas vers ∞ car si on pose $M = 0$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe un nombre impair $n \geq N$, pour lequel on a $c_n = (-2)^n = -2^n < 0$. (Exercice : démontrer le reste.)

Exemple 2.13. Démontrer que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 - 2n^2 + 4n}{5n^2 - 4n + 10} = \infty$.

On commence en simplifiant l'expression, avec la division (comme à l'Exemple 2.7), afin d'obtenir

$$\frac{2n^3 - 2n^2 + 4n}{5n^2 - 4n + 10} = \frac{2}{5}n - \frac{2}{25} + \frac{42n}{25(5n^2 - 4n + 10)}$$

et alors on remarque que

$$\frac{2}{5}n - \frac{2}{25} + \frac{42n}{25(5n^2 - 4n + 10)} \geq \frac{2}{5}n - 1$$

(Il y avait un milliers d'autres approximations qui auront suffit ; on ne veut qu'arriver à un point où c'est évident que la suite croit sans borne.)

Dém : soit $M \in \mathbb{N}$. Choisir $N = 5(M+1)$. Alors pour tout $n \geq N$, nous avons $n \geq N \geq 5(M+1)/2$ alors

$$\frac{2n^3 - 2n^2 + 4n}{5n^2 - 4n + 10} \geq \frac{2}{5}n - 1 \geq \frac{2}{5}(5(M+1)/2) - 1 = M.$$

cqfd.

Alors il y a des suites, comme $\{(-2)^n\}$ et $\{(-1)^n\}$, qui divergent, mais dans aucune direction. Il nous faudra autres notions pour décrire les propriétés intéressantes de cette suite (eg, si elles ont des *sous-suites convergentes*).

2.2.3 L'unicité de la limite

Théorème 2.14. *La limite d'une suite est unique. C'est à dire, si $\{a_n\}$ est une suite et on a deux nombres L, L' tels que $a_n \to L$ et $a_n \to L'$ alors $L = L'$.*

> Avec l'aide d'un dessin, on voit que si $L \neq L'$ et si ε est la moitié de la distance entre L et L', alors on ne peut pas être à la fois ε-proche à L et à L'.

Démonstration. Supposons au contraire que $\{a_n\}$ admet deux limites distinctes, L et L'. Alors $\varepsilon = |L - L'|/2 > 0$. Puisque $a_n \to L$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|a_n - L| < \varepsilon$. De même, puisque $a_n \to L'$, il existe un $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m \geq N'$, $|a_m - L'| < \varepsilon$.

Soit $n > \max\{N, N'\}$. Alors par un exercice du devoir on a

$$|L - L'| \leq |a_n - L| + |a_n - L'| < \varepsilon + \varepsilon = |L - L'|$$

ce qui est une contradiction. Donc $L = L'$, et toute limite, si elle existe, est unique. □

2.2.4 Les limites et les intervalles

Théorème 2.15. *Soient $c < d$ des nombres réels. Soit $\{a_n\}_{n\geq 0}$ une suite convergente avec limite a telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in [c,d]$. Alors $a \in [c,d]$.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Supposons au contraire que $a > d$. Posons $\varepsilon = a-d > 0$. Puisque $\{a_n\}$ converge vers a, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $|a_n - a| < \varepsilon = a-d$. Par Lemme 1.8, ceci implique que

$$a - (a-d) < a_n < a + (a-d)$$

et donc

$$d < a_n$$

ce qui contredit l'hypothèse que $a_n \in [c,d]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $a \leq d$.

Le cas $a < c$ est semblable ; c'est un exercice. On conclut que $a \in [c,d]$. □

Par contre, c'est faux si on remplace $[c,d]$ par l'intervalle ouvert (c,d).

Exemple 2.16. Soit $(0,1)$ l'intervalle ouvert. La suite $a_n = \frac{1}{n}$ est convergente, et a la propriété que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in (0,1)$. Mais sa limite est de 0, qui n'est pas dans cette intervalle.

Donc : l'hypothèse que l'intervalle soit fermé est crucielle.

2.2.5 Exercices

1. La convergence d'une suite $\{a_n\}$ vers une limite L est définie par

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ t.q.\ \forall n \geq N\ |a_n - L| < \varepsilon.$$

   Trouver des suites *divergentes* qui ont les propriétés (semblables !) suivantes :
   a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ t.q.\ |a_N - L| < \varepsilon$.
   b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ t.q.\ \exists n \geq N\ t.q.\ |a_n - L| < \varepsilon$.
   c) $\exists \varepsilon > 0\ t.q.\ \exists N \in \mathbb{N}\ t.q.\ \forall n \geq N\ |a_n - L| < \varepsilon$.
   d) $\exists \varepsilon > 0\ t.q.\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N\ t.q.\ |a_n - L| < \varepsilon$.
   e) $\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ t.q.\ \exists n \geq N\ |a_n - L| < \varepsilon$.
   De même, trouver des suites *convergentes* qui n'ont pas les propriétés suivantes :
   a) $\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ |a_N - L| < \varepsilon$.
   b) $\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |a_n - L| < \varepsilon$.
   c) $\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N\ t.q.\ |a_n - L| < \varepsilon$.
   d) $\exists N \in \mathbb{N}\ t.q.\ \forall n \geq N\ a_n = L$
2. L'énoncé logique de "la suite $\{a_n\}$ est convergente" est

$$\exists L \in \mathbb{R}\ t.q.\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ t.q.\ \forall n \geq N\ |a_n - L| < \varepsilon.$$

   Donner l'énoncé logique de la négation, c-à-d, "la suite $\{a_n\}$ est divergente."

3. Donner une preuve directe de l'unicité de la limite, en utilisant le fait que si pour tout $\varepsilon > 0$ on a $|L - L'| < \varepsilon$, alors forcément $L = L'$.
4. Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente avec limite L telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b$. Démontrer que $L \leq b$.
5. Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente avec limite L telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq b$. Démontrer que $L \geq b$.
6. Donner un exemple d'une suite convergente $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ avec limite L telle que $a_n < b$ pour tout n mais que $L \geq b$. (ou bien, que $a_n > b$ pour tout n mais $L \leq b$).
7. Démontrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
8. Démontrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n+1}{n^2-7} = 3$.
9. Démontrer que $\lim_{n\to\infty} y^n = 0$ si $0 < y < 1$.
10. Démontrer que $\lim_{n\to\infty} y^n = \infty$ (qu'elle diverge vers l'infini !) si $y > 1$.
11. Démontrer que $\lim_{n\to\infty} y^n = 1$ si $y = 1$.
12. Démontrer que $\{y^n\}$ diverge si $y < -1$, mais qu'elle diverge ni vers l'infini, ni vers $-\infty$.
13. Démontrer que $\lim_{n\to\infty} |-3 + \frac{1}{n}| = 3$.
14. Démontrer que $\lim_{n\to\infty} |1 + (-1)^n \frac{1}{n}| = 1$.

2.3 Propriétés de suites convergentes

C'est difficile et parfois ennuyeux de démontrer la convergence d'une suite à partir de la définition. Alors il faudra commencer à bâttir un ensemble d'outils (de théorèmes) qui nous permettront de conclure la convergence d'une suite directement.

2.3.1 L'algèbre de limites de suites convergentes

Ce théorème, qu'on appelle parfois le Théorème de l'algèbre de suites convergentes, nous dit comment qu'on peut combiner des suites convergentes algébriquement telle que la suite résultant est aussi convergente.

Théorème 2.17. *Soient $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites convergentes telles que $a_n \to a$ et $b_n \to b$. Alors*

(a) Si $d \in \mathbb{R}$ est une constante alors si $c_n = da_n$ alors $c_n \to da$.

(b) Si $c_n = a_n + b_n$ alors $c_n \to a + b$

(c) Si $c_n = a_n - b_n$ alors $c_n \to a - b$

(d) Si $c_n = a_n b_n$ alors $c_n \to ab$

(e) Si $b \neq 0$ alors il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $b_n \neq 0$. En effet, on peut choisir N pour que $\forall n \geq N$, $|b_n| > \frac{1}{2}|b| > 0$.

(f) Si $b \neq 0$, alors il existe un N tel que $\forall n \geq N$, $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ est bien définie. De plus, $\{c_n\}_{n\geq N}$ converge vers a/b.

(g) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq b_n$, alors $a \geq b$.

Remarque 2.18. Ce théorème nous dit comment prendre la somme et le produit de nombres réels ! Puisque un nombre réel a est la limite d'une suite de nombres rationnels $\{a_n\}$, pour trouver la somme $a + b$, il suffit de calculer les sommes $a_n + b_n$, pour tout n, et ceci nous donnera une suite convergente, dont la limite est $a+b$. C-à-d : quand on tente de prendre la somme de deux nombres avec expansion décimale infini, on a toujours une petite erreure à cause d'arrondissement. Ce théorème implique que ces erreures diminuent en fonction de la précision de votre arrondissement.

Démonstration du Théorème. Pour chaque portion de cette preuve, soient $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites convergentes telles que $a_n \to a$ et $b_n \to b$.

(a) Posons $c_n = da_n$. Si $d = 0$, $\{c_n\}$ est la suite constante 0, qui converge vers $0 = da$. Autrement, soit $\varepsilon > 0$. Puisque $a_n \to a$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|a_n - a| < \varepsilon/|d|$. Il en suit que pour tout $n \geq N$,

$$|c_n - ad| = |da_n - da| = |d||a_n - a| < |d|(\varepsilon/|d|) = \varepsilon$$

CQFD.

(b) Posons, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $c_n = a_n + b_n$. Posons $c = a+b$. Il faut démontrer que $\lim_{n\to\infty} c_n = c$. Donc, soit $\varepsilon > 0$.

Brouillon : on sait que a_n s'approchent à a et les b_n s'approchent à b, mais peut-être à deux vitesses différentes. Je veux obtenir $|c_n - c| < \varepsilon$. Si j'avais $|a_n - a| < \varepsilon/2$ et $|b_n - b| < \varepsilon/2$, alors par l'inégalité triangulaire, je l'aurai ! Par contre, l'instant N_1 où la première comment à être satisfaite ne coincidera probablement pas avec l'instant N_2 où la deuxième commence à être satisfaite. Est-ce que c'est un problème ? Non ! Ce n'est pas crucielle de trouver l'instant exacte où l'inégalité commence à être vrai ; il suffit simplement de trouver un seul instant après lequel tout commence à tenir.

Puisque $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, il existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, on a $|a_n - a| < \varepsilon/2$. Puisque $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, il existe un $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, on a $|b_n - b| < \varepsilon/2$. Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. Alors si $n \geq N$, il suit que $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$. Donc

$$\begin{aligned}
|c_n - c| &= |a_n + b_n - a - b| \\
&= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\
&\leq |a_n - a| + |b_n - b| \quad \text{par l'inégalité triangulaire} \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \quad \text{car } n \geq N_1 \text{ et } n \geq N_2 \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

CQFD.

(c) (semblable ; exercice)

(d) Posons, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $c_n = a_n b_n$. Posons $c = ab$. Il faut démontrer que $\lim_{n\to\infty} c_n = c$. Donc, soit $\varepsilon > 0$.

Brouillon : cette fois, c'est plus compliqué. Quand on développe :

$$c_n - c = a_n b_n - ab$$

ça ne se factorise pas simplement en facteurs $a_n - a$ et $b_n - b$. Mais il y a une MÉTHODE DE PRODUITS qui nous aidera :

$$c_n - c = a_n b_n - a_n b + a_n b - ab = a_n(b_n - b) + (a_n - a)b.$$

Donc on a

$$|c_n - c| \leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b|.$$

C'est presque parfait. En choississant n assez grand, on peut forcer les différences d'être aussi petits qu'on veut. Mais quoi faire avec $|a_n|$? Il n'est pas forcément petit ; par contre, on sait qu'il sera proche à la constante $|a|$. "Proche" ne suffit pas ; mais puis-j'avoir $|a_n| < |a| + 1$, par exemple ? Oui.

Puisque $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, il existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, on a $|a_n - a| < 1$. Par une version de l'inégalité triangulaire, on obtient alors

$$|a_n| - |a| < |a_n - a| < 1$$

or $|a_n| < |a| + 1$.

Puisque $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, il existe un $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, on a $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2(|a|+1)}$.

Si $b \neq 0$, alors $\dfrac{\varepsilon}{2|b|}$ existe et est positif. Puisque $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, il existe un $N_3 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_3$, on a $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2|b|}$. Si $b = 0$ posons $N_3 = 1$.

Posons $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$. Soit $n \geq N$. Alors si $b \neq 0$ nous avons

$$\begin{aligned}
|c_n - c| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\
&\leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| \quad \text{inégalité triangulaire} \\
&\leq (|a|+1)\left(\frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{2|b|}\right)|b| \quad \text{puisque } n \geq N_1, N_2, N_3 \\
&= \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon
\end{aligned}$$

CQFD. Si $b = 0$, nous avons par le même raisonnement que

$$|c_n - c| < (|a|+1)\left(\frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}\right) + |a_n - a| \cdot 0 = \varepsilon/2 < \varepsilon$$

et donc c'est vrai dans ce cas aussi.

(e) Soit $\{b_n\}_{n\geq 0}$ une suite qui converge vers $b \neq 0$. Il faut démontrer qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $b_n \neq 0$.

Brouillon : je fais un dessin et je réalise que le fait que $b \neq 0$ veut dire que le fait d'être à une distance au plus $|b|$ de b revient à être non-nul ; et la convergence nous assure que nous allons éventuellement être à une distance au plus $|b|$ de b. De plus, si on voudrait avoir la condition plus forte $|b_n| > \frac{1}{2}|b|$, il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}|b|$.

Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}|b|$. Alors $\varepsilon > 0$. Donc puisque $\{b_n\} \to b$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|b_n - b| < \varepsilon$. Par l'inégalité triangulaire, ceci implique que

$$|b| - |b_n| \leq |b - b_n| = |b_n - b| < \varepsilon = \frac{1}{2}|b|$$

or $|b_n| > \frac{1}{2}|b|$. Donc en particulier, pour tout $n \geq N$, $b_n \neq 0$.

(f) Soit $\{b_n\}$ une suite convergente vers $b \neq 0$, et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|b_n| \geq \frac{1}{2}|b|$. Alors on peut définir, pour $n \geq N$, $c_n = a_n/b_n$. Il faut démontrer que la limite de cette suite est a/b.

Brouillon : on cherche n tel que $|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}| < \varepsilon$. Or $\frac{|a_n b - b_n a|}{|b||b_n|} < \varepsilon$. Bien, $|a_n b - b_n a| = |a_n b - ab + ab - b_n a| \leq |b||a_n - a| + |a||b_n - b|$, qu'on peut borner comme à une questions précédente ; et $|b||b_n| \geq \frac{1}{2}|b|^2$ par hypothèse. Donc on sera capable de forcer cette expression d'être plus petit que ε, en choisissat n assez grand.

Soit $\varepsilon > 0$. Supposons que $a \neq 0$ (le cas $a = 0$ étant un exercice).
Puisque $\{a_n\} \to a$, il existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1$, $|a_n - a| < \frac{\varepsilon|b|}{4}$.
Puisque $\{b_n\} \to b$, il existe un $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2$, $|b_n - b| < \frac{\varepsilon|b|^2}{4|a|}$.
Soit $N' = \max\{N, N_1, N_2\}$. Alors pour tout $n \geq N'$, on a

$$\begin{aligned}
|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}| &= \frac{|a_n b - b_n a|}{|b_n b|} \\
&\leq \frac{|b||a_n - a| + |a||b - b_n|}{|b_n||b|} \quad \text{inégalité triangulaire} \\
&\leq \frac{|b||a_n - a| + |a||b - b_n|}{\frac{1}{2}|b|^2} \quad \text{puisque } |b_n| > \frac{1}{2}|b| \\
&< \frac{|b|(\varepsilon|b|/4)}{\frac{1}{2}|b|^2} + \frac{|a|(\varepsilon|b|^2/(4|a|))}{\frac{1}{2}|b|^2} \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon
\end{aligned}$$

CQFD.

(g) Supposons au contraire que pour tout $n \in N$, $a_n \geq b_n$ mais $a < b$. Posons $\varepsilon = (b - a)/2 > 0$. Alors puisque $a_n \to a$, il existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|a_n - a| < \varepsilon$. Puisque $a + \varepsilon = a + (b - a)/2 = (a + b)/2$, ceci implique que pour tout $n \geq N_1$:

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon = (a + b)/2.$$

Puisque $b_n \to b$, il existe un $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $|b_n - b| < \varepsilon$. On a $b - \varepsilon = b - (b - a)/2 = (a + b)/2$, alors pour tout $n \geq N_2$:

$$(a + b)/2 = b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon.$$

Or, pour tout $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, on a

$$a_n < (a + b)/2 < b_n$$

ce qui contredit notre hypothèse que $a_n \geq b_n$ pour tout n. Donc $a \geq b$.

$\square$

Exemple 2.19. Trouver
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+2n+1}{3n^2-4n+2}.$$

Ce n'est pas un quotient de suites convergentes, donc le théorème ne s'applique pas directement. (On n'a pas le droit, ni y-a-t-il un sens, de dire que la limite serait ∞/∞ !) Mais si on fait un peu d'algèbre, on remarque
$$\frac{2n^2+2n+1}{3n^2-4n+2} = \frac{2+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}.$$
Beaucoup mieux ! Bien : on a démontré que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (ou c'est un exercice facile). Soit $a_n = \frac{1}{n}$; alors par partie (d) du théorème de l'algèbre des suites convergentes, $a_n^2 = a_n a_n \to 0 \cdot 0 = 0$. Donc $\frac{1}{n^2} \to 0$. Aussi, partie (a) nous dit que $\frac{2}{n} = 2(\frac{1}{n}) \to 2(0) = 0$ et partie (b) nous dit que $(2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \to 2+0+0 = 2$. Or le numérateur est une suite convergente avec limite 2.

Le même argument nous donne que le dénominateur est une suite convergente avec limite 3. Or, par la partie (e), puisque le dénominateur ne converge pas vers 0, le quotient converge vers $\frac{2}{3}$. Alors par le théorème de l'algèbre des suites convergentes,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+2n+1}{3n^2-4n+2} = \frac{2}{3}.$$
Remarque 2.20. Antiéurement, vous auriez justifié cet argument en écrivant
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{2+\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{3-\frac{4}{\infty}+\frac{2}{\infty}} = \frac{2}{3}$$
mais ceci n'est pas acceptable comme réponse dans un cours sérieux ; c'est un raccourci facile et utile, bien sûr, mais il ne s'applique qu'aux cas faciles. Développez les bonnes habitudes maintenant, avec des exemples qui vous sont évidents, et alors les cas moins évidents seront beaucoup plus faciles à comprendre.

Exemple 2.21. Soit $-1 < r < 1$. Trouver
$$\lim_{n\to\infty} (1 + r + \cdots + r^n).$$

On remarque que
$$1 + r + \cdots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}.$$
Puisque $-1 < r < 1$, $r^n \to 0$ (exercice). Donc $1 - r(r^n) \to 1 - 0 = 1$ par le théorème de l'algèbre des suites convergentes, et donc
$$\lim_{n\to\infty} (1 + r + \cdots + r^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{0}{1-r} = 0,$$
puisque $1 - r$ est une constante non-nulle.

Exemple 2.22. Notons que tout $r \in \mathbb{R}$ est la limite de la suite de ses approximations décimales. Donc on sait, finalement, comment prendre la somme ou le produit de deux nombres réels (et irrationnels) : soit $r_n \to r$, $p_n \to p$, alors $r + p$ est la limite de la nouvelle suite $r_n + p_n$, et rp est la limite de la suite $r_n p_n$. C'est tout à fait ce qu'on a cru serait le cas !

2.3.2 Exercices

1. Démontrer la partie (c) du Théorème 2.17.
2. Démontrer la partie (e) du Théorème 2.17. Celui est plus difficile. Commencer par le cas que $b_n > 0$ pour tout n, par exemple. Puis faites le cas général.
3. Démontrer la partie (f) du Théorème 2.17. Utiliser la version plus forte des inégalités en (e) pour borner le dénominateur (car si le dénominateur pourrait s'approcher à 0, la fraction ne sera jamais pas bornée par un $\varepsilon > 0$).
4. Démontrer le Théorème des gendarmes [2] :
   Théorème 2.23. *Soient $\{a_n\}, \{b_n\}$ et $\{c_n\}$ des suites de nombres réels tels que $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ convergent vers la même limite L. S'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$*
   $$a_n \leq c_n \leq b_n$$
   alors $c_n \to L$.
5. Démontrer que si $-1 < r < 0$ alors $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.
6. Trouver la limite des suites suivantes et utiliser le théorème de l'algèbre des suites convergentes pour démontrer votre réponse.
   (a) $a_n = 3(\frac{1}{2^n}) - (0.2)^n$
   (b) $a_n = \frac{12}{5n}$
   (c) $a_n = \frac{1}{n2^n}$
7. Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
   (a) Démontrer que si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi.
   (b) Donner un exemple d'une suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergente telle que $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   (c) Démontrer que si $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 aussi.
8. Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs qui converge vers 3. Démontrer avec la définition que la suite $\{\sqrt{a_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{3}$. Conseil : $(\sqrt{b} - \sqrt{c})\frac{(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \frac{(b-c)}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})}$.

2.4 Suites et sous-suites, convergente et bornée

2.4.1 Les suites convergentes sont bornées

On dit qu'une suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* s'il existe une borne $B \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| < B$. C'est équivalent à dire que l'ensemble de ses éléments est borné.

Il existe des suites bornées qui sont *divergentes*, comme $a_n = (-1)^n$. Donc le fait qu'une suite est bornée n'implique pas qu'elle est convergente. Par contre, l'inverse est vrai.

Théorème 2.24. *Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Alors elle est bornée.*

L'idée de la preuve : on sait que la queue de la suite sera proche à la limite, donc sera bornée ; et puisqu'il n'y a qu'une nombre fini d'éléments avant la queue, ils atteignent un maximum et un minimum, donc sont bornés. Parfait !

2. Imaginer un paire de gendarmes qui accompagnent l'accusé à la guillotine.

Démonstration. Soit L la limite de la suite convergente $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Alors il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, nous avons
$$|a_n - L| < 1,$$
qui implique en particulier, par une version de l'inégalité triangulaire,
$$|a_n| \leq |a_n - L| + |L| < 1 + |L|.$$
De l'autre part, l'ensemble $E = \{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|\}$ est fini donc borné ; soit $s = \sup(E)$.

Par la propriété archimédienne, il existe un $B \in \mathbb{N}$ tel que $B > \max\{s, 1 + |L|\}$. Il suit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|a_n| < B.$$
□

Ce théorème est important pour nous aider à concevoir le comportement d'une suite convergente ; on aura encore plus à dire prochainement.

Par contre, ce théorème n'est pas souvent utile comme tel ; par exemple, on ne peut pas l'utiliser pour démontrer qu'une suite est convergente. C'est plutôt utile pour démontrer qu'une suite est divergente, en démontrant qu'elle n'est pas bornée.

Exemple 2.25. Démontrer que la suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n n - \sin(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

On remarque que
$$|(-1)^n n - \sin(n)| \geq |(-1)^n n| - |\sin(n)| > n - 1$$
car $|(-1)^n n| = n$ et $|\sin(n)| \leq 1$ pour tout n. Donc pour tout $B \in \mathbb{N}$, posons $N = B + 1$; or $|a_N| > B$ et la suite n'est pas bornée. Par le théorème, on conclut que la suite est divergente.

2.4.2 Les suites bornées et monotones sont convergentes

Alors Théorème 2.24 dit que *si* une suite est convergente *alors* elle est bornée. Être bornée n'est pas une condition suffisante pour forcer une suite à être convergente ; mais voici une deuxième condition qui, en concert avec être bornée, forcera la convergence.

Définition 2.26. Une suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

1. est dite *croissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1}$;
2. est dite *strictement croissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n < a_{n+1}$;
3. est dite *décroissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq a_{n+1}$; et
4. est dite *strictement décroissante*[3] si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > a_{n+1}$.

Toute telle suite est dite *monotone.*

3. Attention : quelques auteurs disent "noncroissante" pour nos suites décroissantes, et "croissantes" pour nos suites strictement croissantes, *etc.*

Exemple 2.27. La suite $\{\frac{1}{n}\}_{n\geq 1}$ est (strictement) décroissante.

La suite 2^n est (strictement) croissante.

La suite constante $\{4\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et décroissante, mais ni strictement croissante, ni strictement décroissante.

Toutes ces suites sont monotones.

Exemple 2.28. La suite $\{(-0.5)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

Voici notre premier théorème vraiment formidable.

Théorème 2.29. *Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée et monotone. Alors elle est convergente.*

Démonstration. Il y a deux cas à considérer : que la suite est croissante, et que la suite est décroissante. On démontre le cas d'une suite croissante ici, et on laisse l'autre comme exercice.

Alors soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et bornée. Puisque la suite est bornée, l'ensemble $E = \{a_1, a_2, \cdots\}$ de ses éléments est bornée ; posons $s = \sup(E)$. Démontrons que $\lim_{n\to\infty} a_n = s$.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors puisque $s = \sup(E)$, il existe un élément $x \in E$ tel que $x > s - \varepsilon$. Ça veut dire qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $s - \varepsilon < a_N$. Soit $n \geq N$. Puisque la suite est croissante, $a_N \leq a_n$, or

$$s - \varepsilon < a_N \leq a_n.$$

Puisque $s = \sup(E)$, on sait que $|a_n - s| = s - a_n$. Donc nous avons

$$|a_n - s| = s - a_n < \varepsilon.$$

CQFD. □

2.4.3 Les sous-suites, et le théorème de Bolzano-Weierstrass

Définition 2.30. Soit $\{a_n\}$ une suite de nombres réels et soit $\{n_k\}$ une suite strictement croissante de nombres naturels. Alors la suite

$$\{a_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

est une *sous-suite* de $\{a_n\}$. [4]

Exemple 2.31. Soit $a_n = \frac{1}{n}$. Alors voici quelques sous-suites de $\{a_n\}$ et les suites $\{n_k\}$ correspondantes :

$\{n_k\}$	$\{a_{n_k}\}$
$6, 7, 8, \cdots$	$\{a_n\}_{n\geq 6}$
$\{k^2\}_{k\geq 1}$	$\left\{\frac{1}{k^2}\right\}_{k\geq 1}$
$\{2k\}_{k\geq 1}$	$\left\{\frac{1}{2k}\right\}_{k\geq 1}$

Par contre, on n'a pas le droit de mélanger l'ordre des termes de la suite $\{a_n\}$.

4. Donc une sous-suite (d'une suite donnée) est une suite, comme un sous-ensemble (d'un ensemble donné) est un ensemble.

Exemple 2.32. La suite divergente $\{(-1)^n\}$ admet deux sous-suites convergentes (les suites constantes 1 et -1, respectivement) correspondant au nombres pairs et impairs, respectivement.

La suite divergente $\{n^2\}$ n'admet aucune sous-suite convergente.

Une bonne question : quand est-ce que une suite admet une sous-suite convergente ? Et que sont les limites possibles ?

Lemme 2.33. *Soit $\{a_n\}$ une suite convergente. Alors toute sous-suite est convergente, et vers la même limite.*

Démonstration. Soit $\{a_{n_k}\}$ une sous-suite de $\{a_n\}$. Soit $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $|a_n - L| < \varepsilon$. Puisque $\{n_k\}$ est une suite de nombre naturels croissante, elle n'est pas bornée (exercice) et donc il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $n_K \geq N$. Donc pour tout $k \geq K$, on a $n_k \geq n_K \geq N$ et donc $|a_{n_k} - L| < \varepsilon$. Alors la sous-suite converge elle aussi vers L. $\square$

Théorème 2.34 (Bolzano-Weierstrass, 1874)**.** *Toute suite bornée admet au moins une sous-suite convergente.*

Avant de démontrer ce théorème, remarquons qu'est-ce qu'il dit, et qu'est-ce qu'il ne dit pas :
- Il ne dit pas que toute suite bornée est convergente (qui est faux) ; il ne dit qu'on peut toujours trouver une sous-suite convergente.
- La conclusion est fausse si on omet la condition que la suite soit bornée : penser à la suite $\{n^2\}$, qui a la propriété que toute sous-suite diverge vers ∞.
- Si la suite est convergente déjà, la conclusion du théorème est évident, car on peut prendre la suite au complet comme la sous-suite convergente cherchée.
- Le théorème semble évident pour une suite comme $\{(-1)^n\}$; mais il est fascinant et pas du tout évident pour une suite comme $\{\sin(n)\}$!

Avant de démontrer le théorème, on démontrer un petit lemme.

Lemme 2.35. *Toute suite de nombres réels contient une sous-suite monotone.*

La démonstration est très élégante.

Démonstration. Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et posons

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m > n, a_n \leq a_m\}$$

l'ensemble qui indexe tous les éléments de la suite qui sont plus petits ou égale à chaque a_m qui vient après dans la suite.

> Par exemple, si $a_n = (-1)^n$, E est l'ensemble des nombres impairs. Si $a_n = \frac{1}{n}$, $E = \emptyset$.

Si E est infini, alors $\{a_n\}_{n\in E}$ est une sous-suite de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et par construction cette sous-suite est croissante.

Autrement, construisons une sous-suite strictement décroissante comme suit.

Puisque E n'est pas infini, il existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n_1 > n$ pour tout $n \in E$. Mais alors $n_1 \notin E$, qui implique qu'il existe au moins un $m > n_1$ tel que $a_m < a_{n_1}$. Posons $n_2 = m$. Alors $n_2 > n_1$ et $a_{n_2} < a_{n_1}$.

Supposons qu'on a trouvé $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k$ tel que $a_{n_1} > a_{n_2} > \cdots > a_{n_k}$. Puisque $n_k \notin E$, il existe un nombre plus grand, l'appelons n_{k+1}, tel que $a_{n_{k+1}} < a_{n_k}$.

Donc ce processus donne une sous-suite de $\{a_n\}$ qui est (strictement) décroissante, et le lemme est démontré. $\square$

Maintenant, c'est facile de démontrer Bolzano-Weierstrass.

Démonstration du théorème Bolzano-Weierstrass. Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Par le lemme, elle admet une sous-suite monotone. Cette sous-suite est alors une suite monotone et bornée, donc convergente par Thm 2.29. $\square$

2.4.4 Exercices

1. Démontrer que si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et bornée, alors elle converge vers son infimum.
2. Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Démontrer que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
3. Donner une suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge mais $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
4. Soient $a_1 = \frac{3}{2}$ et $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$ pour $n \geq 1$.
   - Montrer que $1 \leq a_n \leq 2$ pour tout $n \geq 1$. (Conseil : utiliser l'induction.)
   - Montrer que la suite a_n est monotone. (Conseil : calculer $a_{n+1} - a_n$ et puis penser au graphe de la fonction $y = x^2 - 2x + 1$.)
   - Conclure que $\{a_n\}$ est convergente.
   - Soit a sa limite. Étant donnée que $\lim_{n\to\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$, et la formule recursive, trouver a.
5. Démontrer que toute sous-suite d'une suite convergente est convergente, vers la même limite.
6. Soit $\{a_n\}$ une suite qui admet deux sous-suites convergentes avec différentes limites. Démontrer que $\{a_n\}$ est divergente.
7. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ alors $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$ et $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = a$.
8. Montrer que $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$. Indice : écrire $n^{1/n} = 1 + a_n$ pour une suite inconnue a_n. Puis démontrer que $(1 + a_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$ afin de conclure $a_n \to 0$.
9. Donner un exemple d'une suite qui admet deux sous-suites distinctes convergentes vers la même limite, mais qui n'est pas convergente.
10. Soient $\{n_k\}$ et $\{m_k\}$ deux suites strictement croissantes de nombres naturels tel qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, n apparaît dans au moins de ces suites. (eg : les nombres pairs et les nombre impairs). Démontrer que si $\{a_{n_k}\}$ et $\{a_{m_\ell}\}$ convergent vers la même limite L. alors $\{a_n\}$ converge vers L aussi.

Chapitre 3

Les fonctions réelles

Dans ce chapitre, on considère les fonctions à un variable $f\colon U \to \mathbb{R}$ où $U \subseteq \mathbb{R}$ est le domaine de la fonction. En plus, on va supposer que U est in intervalle ouvert, ou fermé, ou demi-ouvert. En générale, le domaine de la sorte de fonction dont on est intéressé en analyse (et un calcul différentiel et intégrale) est la réunion d'un nombre fini de tels intervalles.

3.1 Définitions

On commence avec une observation.

Soit f une fonction et soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments dans son domaine. Alors on peut former la nouvelle suite

$$\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

de nombres réels.

Par exemple, si $f(x) = 2x^2 - x + 3$ et $x_n = \frac{1}{n}$, alors

$$f(x_n) = 2\left(\frac{1}{n}\right)^2 - \frac{1}{n} + 3 = \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n} + 3.$$

Cette idée nous permet de définir la limite de f lorsque x tend vers c, qui est la notion clef de Calcul différentiel.

3.1.1 La limite d'une fonction

Définition 3.1. Soit $f\colon U \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $c \in U$ ou c la limite d'une suite d'éléments de U.[1] On dit que la limite de f lorsque x tend vers c est L, et on écrit

$$\lim_{x\to c} f(x) = L,$$

1. Quand il s'agit de $c = \sup(U)$ ou $c = \inf(U)$, nous ne parlons ici que des limites à gauche et à droite respectivement ; s'il y a la possibilité de confusion (eg, qu'on aurait pu choisir un plus grand domaine, et donc pris la limite des deux côtés), il faudra spécifier $\lim_{x\to c-} f(x)$ et $\lim_{x\to c+} f(x)$, respectivement.

si pour toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in U$;

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq c$; et

(iii) $\lim_{n\to\infty} x_n = c$

on a que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

Exemple 3.2. Soit

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \neq 7 \\ 2 & \text{si } x = 7. \end{cases}$$

Quelle est la limite de f lorsque x tend vers 3 ?

Solution : Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}$ qui converge vers 7, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq 7$. Alors $f(x_n) = x_n - 3$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n - 3) = \lim_{n\to\infty} x_n - 3 = 7 - 3 = 4.$$

C'est vrai pour n'importe quelle telle suite, alors on conclut que

$$\lim_{x\to 7} f(x) = 4.$$

On remarque que ceci n'a rien à faire avec la valeur actuelle de $f(7)$.

Le cas le plus intéressant est quand L coincide avec $f(c)$.

3.1.2 La continuité

Définition 3.3. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $c \in U$. On dit que f est continue en c si

$$\lim_{x\to c} f(x)$$

existe et est égale à $f(c)$. On dit que f est continue si elle est continue en tout point de son domaine.

On peut mettre ces deux définitions ensembles.

Lemme 3.4. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $c \in U$. Alors f est continue en c si pour toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de U qui converge vers c, on a*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c).$$

Notons qu'on n'a pas dû exclure les suites qui contiennent c. Par exemple, on permet la suite constante $x_n = c$; ça donne la suite $f(x_n) = f(c)$. Donc si la valeur de la limite lorsque x tend vers c est $f(c)$, c'est aussi vrai pour toute suite qui contient c.

Exemple 3.5. Soit $f(x) = x^2$ et $c \in \mathbb{R}$. Alors $f(c) = c^2$. Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers c. Alors
$$f(x_n) = x_n^2 \to c^2$$
par le théorème de l'algèbre de suites convergentes. Donc f est continue en tout point $c \in \mathbb{R}$.

Exemple 3.6. Soit $f(x) = |x + 2|$ et $c \in \mathbb{R}$. Démontrer que f est continue en c.

Solution : Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers c. Il faut démontrer que $|x_n + 2|$ converge vers $|c + 2|$. Comment le faire ? Par la définition de la limite.

Soit $\varepsilon > 0$. Il faut démontrer qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,
$$|f(x_n) - f(c)| = ||x_n + 2| - |c + 2|| < \varepsilon.$$

Si $c = -2$, alors le fait que $x_n \to -2$ implique qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|x_n - (-2)| < \varepsilon$. Donc pour $n \geq N$:
$$||x_n + 2| - | - 2 + 2|| = |x_n - (-2)| < \varepsilon,$$
cqfd. Autrement, posons $T = |c - (-2)| > 0$. C'est la distance entre c et -2 ; si x_n est plus proche à c que -2, il suit que $x_n + 2$ et $c + 2$ auront le même signe. Plus précisement :

Si $T = |c+2| = c+2 > 0$ alors $|x_n - c| < T$ impliquerai $-(c+2) < x_n - c$, or $0 < x_n + 2$ en ajoutant $c + 2$. Si par contre $c + 2 < 0$, alors $T = |c + 2| = -(c + 2) > 0$, alors $|x_n - c| < T$ impliquerai $x_n - c < -(c + 2)$, or $x_n + 2 < 0$ en ajoutant $c + 2$.

Alors on continue : par la convergence de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vers c, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|x_n - c| < \min\{T, \varepsilon\}$. Donc si $c + 2 > 0$ on a $x_n + 2 > 0$ or
$$||x_n + 2| - |c + 2|| = |x_n + 2 - (c + 2)| = |x_n - c| < \varepsilon$$
et si $c + 2 < 0$ on a $x_n + 2 < 0$ or
$$||x_n + 2| - |c + 2|| = | - (x_n + 2) - (-(c + 2))| = |x_n - c| < \varepsilon.$$
cqfd.

C'était pénible ! On a besoin de quelques théorèmes afin de nous aider. Mais maintenant : une fonction discontinue intéressante.

Exemple 3.7. Soit $f \colon (0, 1) \to \mathbb{R}$ la fonction
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est irrationnel} \\ 0 & \text{si } x \text{ est rationnel.} \end{cases}$$

Démontrons qu'elle n'est continue en aucun point. On appuye une **MÉTHODE STANDARD** :

Soit x un nombre irrationnel. On construit une suite d'éléments de $(0, 1)$ qui converge vers x comme suit. Soit $n \in \mathbb{N}_+$. Posons $y_n = \max\{0, x - \frac{1}{n}\}$. Donc $y < x$. Par la densité des nombre rationnels, il existe un nombre rationnel x_n tel que $y_n < x_n < x$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}_+$, $x_n \in (0, 1)$ et $x_n \neq x$; démontrons que $x_n \to x$:

Soit $\varepsilon > 0$. Choisir par la propriété archimédienne $N \in \mathbb{N}_+$ tel que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Alors pour tout $n \geq N$,

$$|x_n - x| = x - x_n < x - y_n \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

CQFD.

Par contre, $f(x_n) = 0$ pour tout n, alors $f(x_n) \to 0$ tandis que $f(x) = 1$. Donc la fonction n'est pas continue en x irrationnel.

Le cas de x rationnel est semblable ; il faut utiliser la densité des nombres irrationnels.

3.1.3 Propriétés de fonctions continues

Notons qu'une fonction continue satisfait la propriété suivante, pour toute suite convergente $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans son domaine, avec limite dans son domaine :

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

Donc, le théorème suivant suit directement du théorème de l'algèbre de suites convergentes.

Théorème 3.8 (Propriétés de fonctions continues)**.** *Soit $c \in U \subseteq \mathbb{R}$ et soient $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ continues en c. Alors*

(a) $f + g$ est continue en c ;

(b) fg est continue en c ;

(c) pour tout $r \in \mathbb{R}$, rf est continue en c ;

(d) si $g(c) \neq 0$ alors il existe $r > 0$ tel que $\frac{1}{g}$ est définie sur $(c-r, c+r) \cap U$ et $\frac{1}{g}$ est continue en c.

De plus, si l'image de f est contenu dans le domaine d'une fonction $h\colon V \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et h est continue en $f(c)$, alors $h \circ f\colon U \to \mathbb{R}$ est continue en c.

Rappel : La fonction $f + g\colon U \to \mathbb{R}$ est définie par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$; de même $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\frac{1}{g}(x) = \frac{1}{g(x)}$ et $(rf)(x) = r \cdot f(x)$. La composition de deux fonctions est écrit $h \circ f$ et on définit $(h \circ f)(x) = h(f(x))$.

Démonstration. Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans U qui converge vers c. Alors puisque f et g sont continues en c, on sait que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to f(c)$ et $\{g(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to g(c)$. Donc, par le théorème de l'algèbre de suites convergentes,

$$\begin{aligned} f(x_n) + g(x_n) &\to f(c) + g(c) \\ f(x_n)g(x_n) &\to f(c)g(c) \\ rf(x_n) &\to rf(c) \\ \frac{1}{g(x_n)} &\to \frac{1}{g(c)} \quad \text{pour } n \text{ suffisament grand.} \end{aligned}$$

Les énoncés (a) à (c) suivent.

Pour (d), supposons au contraire qu'il n'existe aucun intervalle autour de c où g est non-nulle. Créer une suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ d'éléments de U qui converge vers c comme suit (MÉTHODE STANDARD) : pour chaque $n \geq 1$, choisir un point $a_n \in (c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}) \cap U$ tel que $g(a_n) = 0$, qui existe par notre hypothèse. Alors $a_n \to c$ mais $g(a_n) = 0$ pour tout n donc $g(a_n) \to 0 \neq g(c)$. Ça contredit la continuité de g en c. Donc il existe un $r > 0$ tel que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in (c - r, c + r) \cap U$. L'énoncé (d) suit alors, avec aussi les remarques précédentes.

Finalement, puisque h est continue et $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans le domaine de h qui converge vers $f(c)$, on peut conclure que la suite $\{h(f(x_n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $h(f(c))$. Donc $h \circ f$ est continue. $\square$

C'est très utile. Par exemple, puisque la fonction $f(x) = x$ est continue (exercice), il en suit que tout fonction polynômial ou rationnel est aussi continue sur son domaine.

Dans ce cours on ne démontrera pas la continuité des fonctions suivantes, mais vous avez le droit de prendre comme acquis le théorème suivant.

Théorème 3.9. *Soit $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Les fonctions suivantes sont continues sur leur domaine :*

$$e^x, \ln(x), \sin(x), \cos(x), \arcsin(x), \arccos(x), \arctan(x), x^r.$$

En combinant ce théorème avec la proposition du début de cette section, on obtient la continuité d'une majorité de fonctions qu'on connait bien.

3.1.4 Autre critères de limites et de continuité (optionnel)

En MAT1720, on dit qu'une fonction est continue si la limite à gauche égale la limite à droite, et que c'est la valeur de la fonction en c.

Définition 3.10. Soit $f\colon U \to \mathbb{R}$ et soit c la limite d'au moins une suite déléments de U. Alors on dit

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L$$

si pour toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans U telle que $x_n < c$ pour tout n et telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, on a

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

De même, on dit

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L$$

si pour toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans U telle que $x_n > c$ pour tout n et telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, on a

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

Lemme 3.11. *Soit $f\colon U \to R$ et $c \in R$ tel qu'il existe une suite dans U qui converge vers c de la droite, et une suite dans U qui converge vers c de la gauche. Alors*

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

si et seulement si

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = L.$$

$\Rightarrow$. : il n'y a rien à démontrer. Puisque c'est vrai pour toute suite, c'est en particulier vrai pour toute suite le gauche, ou de droite.

[$\Leftarrow$] : Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans U qui converge vers c, tel que $x_n \neq c$ pour tout n. Soit $G = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n < c\}$. Si G est fini, alors il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x_n > c$. Donc par hypothèse, la suite $\{f(x_n)\}_{n\geq N}$ converge vers L, ce qui implique que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L.

Posons $R = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n > c\}$. Si R est fini, par le même argument, on déduit que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L.

Si ni R ni G sont finis, alors chacun est infini et définit une sous-suite de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ces sous-suites convergent vers c et consistent d'éléments de droite (respectivement, de gauche) de c, donc par l'hypothèse,

$$\{f(x_n)\}_{n\in G} \to L \quad \text{et} \quad \{f(x_n)\}_{n\in R} \to L.$$

Puisque $G \cup R = \mathbb{N}$, ce sont des sous-suite complémentaires, et par un exercice de suites, il suit que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L. $\square$

On aimerait avoir le choix de suites qui sont proches à c, mais notre définition exige qu'on considère des suites de tout U (qui convergent vers c, éventuellement). Est-ce que c'est nécessaire ?

Lemme 3.12. *Soit $f\colon U \to R$ et $c \in U$. Soit $r > 0$ tel que $(c-r, c+r) \subseteq U$. Alors la limite de f lorsque x tend vers c est indépendent du choix de domaine (U ou $(c-r, c+r)$).*

Démonstration. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans U qui converge vers c, alors il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \in (c-r, c+r)$. Donc puisque la limite de la suite $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ coincide avec la limite de la suite $\{f(x_n)\}_{n\geq N}$, le résultat suit. $\square$

Par contre, la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

n'admet pas de limite en $c = 0$, mais si on restreint le domaine à $[0, \infty)$, on dirait que la limite existe !

Il y a un autre critère pour la continuité d'une fonction, qui ne fait aucun référence aux suites.

Proposition 3.13. *Une fonction $f\colon U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en $c \in U$ ssi*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ t.q.\ \forall x \in U\ |x - c| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

On démontrera cette proposition en MAT2525.

3.1.5 Exercices

1. Soit f la fonction prenant valeur 1 à tout entier et 0 autrement. Identifier tout $c \in \mathbb{R}$ où f est continue, et tout $c \in \mathbb{R}$ en quel f n'est pas continue. Démontrer votre réponse.

2. Démontrer que les fonctions suivantes sont continues en c, à partir de la définition de la continuité.
   (a) $f(x) = x$, $c \in \mathbb{R}$
   (b) $f(x) = \sqrt{x}$, $c = 5$ (aussi : en $c = 0$)
   (c) $f(x) = 14x^2 + 5$, $c \in \mathbb{R}$
   (d) $f(x) = \frac{1}{x}$, $c = 5$
3. Utiliser le théorème concernant les combinaisons de fonctions continues pour démontrer que les fonctions suivantes sont continues en chaque point de leur domaine. Vous pouvez supposer le théorème 3.9.
   (a) $f(x) = x^4 + x^3 + 1$
   (b) $f(x) = \frac{5x^4+x^2+1}{2x^3-x-1}$
   (c) $f(x) = x^2 \sin(1/x)$
   (d) $f(x) = e^{-x^2} \cos(2\pi x)(x^2 - 3)$
4. (a) (Si vous ne l'avez pas déjà faite) Démontrer que si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers 0 et $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée, alors la suite $\{a_n b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   (b) Démontrer que si f est une fonction continue telle que $f(0) = 0$ et g est une fonction qui n'est peut-être pas continue, mais est bornée (au moins dans un intervalle de la forme $[-r, r]$ avec $r > 0$) alors la fonction $(fg)(x) = f(x)g(x)$ est continue en 0.
   (c) Appliquer ce resultat afin de conclure que la fonction
$$h(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
   est continue en 0. Identifier explicitement les fonctions f et g que vous utilisez et vérifier qu'ils satisfont les hypothèses nécessaires.
   (d) Donner un exemple d'une fonction continue f ayant $f(0) = 0$ et une fonction g telle que $fg(x) = f(x)g(x)$ n'est pas continue en 0.
5. Décider si les fonctions suivantes sont continues en c. Démontrer votre réponse utilisant les outils qu'on a présenté au cours.
   (a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x > 2 \\ x^2 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$, $c = 2$
   (b) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x > 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$, $c = 2$
   (c) $f(x) = \begin{cases} x^2+3 & \text{si } x > 0 \\ -3 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$, $c = 0$
   (d) $f(x) = \begin{cases} x^2+3 & \text{si } x > 0 \\ 3 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$, $c = 0$
6. Soit E un ensemble non-vide de nombres réels borné supérieurement et soit $s = \sup(E)$. Soit f la fonction
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$
   Démontrer que si $c > s$ alors f est continue en c.

7. Soient $V \subseteq U$ des intervalles et soient $f: U \to \mathbb{R}$ et $g: V \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que pour tout $x \in V$, $f(x) = g(x)$. (Exemple : $f(x) = |x|$ avec $U = \mathbb{R}$ et $g(x) = x$ avec $V = [0, \infty)$.)
   (a) Supposons que $c \in V$ et il existe $r > 0$ tel que $(c - r, c + r) \subseteq V$. Démontrer que f est continue en c si et seulement si g est continue en c.
   (b) Donner un exemple de f, g, $V \subseteq U$ et $c \in V$ tels que g est continue en c mais f ne l'est pas.
8. Donner une définition, en termes de suites, des conceptes suivantes provenant de calcul différentiel :
   (a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
   (b) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$
   (c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

3.2 Deux grands théorèmes au sujet de fonctions continues

3.2.1 Le Théorème des Valeurs Intermédiaires

Notre premier théorème est plus proche que la définition à la propriété des fonctions continues qu'on apprend au sécondaire : qu'on peut les tracer sans lever le crayon du papier. (Cette propriété n'est pas tout à fait juste ; $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur son domaine, mais qu'on on trace son graphe, il faut lever le crayon quand on arrive à l'asymptote vertical en $x = 0$. Et encore pire, il existe des fonctions continues dont on ne peut même pas tracer le graphe.)

Mais le théorème suivant nous promets au moins qu'une fonction continue ne peut jamais sauter au-dessus d'une valeur y en y passant. Pour le bien exprimer, on se restreint à un intervalle fermé $[a, b]$ dans le domaine U de la fonction.

Théorème 3.14 (Théorème des Valeurs Intermédiaires)**.** *(Bolzano, 1817) Soit $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout z entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un $s \in [a, b]$ tel que $f(s) = z$.*

Exemple 3.15. La fonction $f(x) = x^2$ est continue. Si $a = -1$ et $b = 2$ alors $f(a) = 1$ et $f(b) = 4$ et pour tout $z \in [1, 4]$ il existe $s \in [-1, 2]$ (en effet, en $[1, 2]$) tel que $f(s) = z$.

Exemple 3.16. La fonction

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 1 \\ x - 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

n'est pas continue en $x = 1$. Posons $a = 0$ and $b = 2$. Alors $f(a) = -1$ et $f(b) = 2$, mais avec $z = 1$ il n'existe aucun $s \in [0, 2]$ pour lequel $f(s) = z$.

Remarque 3.17. On pourrait tenter d'esquisser quelques graphes de fonctions pour comprendre l'énoncé du théorème, et pourquoi il devrait être vrai. De nos exemples, on voit qu'il y aura en générale plusieurs valeurs s pour lesquels $f(s) = z$. Comment choisir ? C'est très difficile de démontrer un fait qui est un cible mouvant. Classiquement, on résout ce dilèmme en tentant d'isoler soit le premier, soit de dernier, de ces valeurs.

Démonstration du Théorème des Valeurs Intermédiaires. On suppose que $f(a) < f(b)$ (le cas $f(a) = f(b)$ étant facile et le cas $f(a) > f(b)$ étant un exercice). Si $z = f(a)$ ou $z = f(b)$ il n'y a rien à démontrer, alors supposons $f(a) < z < f(b)$. Soit

$$E = \{x \in [a, b] \mid f(x) < z\}.$$

Alors $a \in E$ donc $E \neq \emptyset$, et E est borné supérieurement par b, alors $\sup(E)$ existe et est un élément de $[a, b]$. Posons $s = \sup(E)$.

> L'ensemble E pourrait être réunion de plusieurs intervalles disjoints (imaginer une fonction qui oscille) ; mais par sa construction, son suprémum est sensé d'être la dernière fois que f atteint z dans l'intervalle $[a, b]$. Démontrons que c'est vrai !

Puisque $s = \sup(E)$, nous pouvons construire une suite d'éléments de E qui convergent vers s, comme suit (MÉTHODE STANDARD) : pour tout $n \geq 1$, il existe un $x \in E$ tel que $s - \frac{1}{n} < x \leq s$ par la définition du suprémum. Posons $a_n = x$. Cette suite converge vers s car pour tout $\varepsilon > 0$, il existe (par la propriété archimédienne) un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Or, pour tout $n \geq N$,

$$|a_n - s| = s - a_n < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Alors puisque $x_n \in E$ et $x_n \to s$ et f est continue en s, $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}_+} \to f(s)$. Puisque $f(x_n) < z$ pour tout n, il suit par Théorème 2.17 que $f(s) \leq z$.

Alors $s \neq b$. Donc on peut construire une suite déléments de $[s, b]$ qui converge vers s (par la MÉTHODE STANDARD) ; appelons cette suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Alors par la continuité de f en s, $f(x_n) \to f(s)$. Mais puisque pour tout n, $x_n \notin E$, nous avons que $f(x_n) \geq z$. Donc par Théorème 2.17, $f(s) \leq z$.

Il suit que $f(s) = z$. $\square$

Ce théorème est utile pour démontrer toutes sortes de faits intéressants. En particulier, c'est un théorème qui nous permet de conclure **l'existence** d'un nombre s avec la propriété $f(s) = z$, même si on n'a aucune façon de la calculer.

Exemple 3.18. Démontrer qu'il existe une racine de $x^5 - 15x - 1$ dans l'intervalle $[0, 2]$.

Puisque $f(x) = x^5 - 15x - 1$ est une fonction continue (appliquer un théorème !), et $f(0) = -1$ et $f(2) = 1$ et $0 \in [-1, 1]$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0, 2]$ tel que $f(c) = 0$.

Remarque 3.19. On pourrait utiliser ce théorème pour isoler une racine de f dans $[0, 2]$ (en calculant $f(1) < 0$, or la racine est en $[1, 2]$, puis évaluer $f(1.5)$, etc). Mais on a vu en MAT1720 que c'est beaucoup plus efficace d'appuyer la méthode de Newton (au moins pour une fonction dérivable comme celui-ci).

Exemple 3.20. Démontrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, pour tout $n \geq 1$, $\sqrt[n]{a}$ existe.

Il faut démontrer qu'il existe un $y \in \mathbb{R}$ tel que $y^n = a$. Posons $f(x) = x^n - a$; c'est continue sur $\mathbb{R}$. Si $a = 0$ ou $n = 1$ c'est fait ; alors soient $n \geq 2$ et $a > 0$. Si $0 < a < 1$, alors $a^n - a < 0$ alors $f(a) < 0 < f(1)$; or il existe un $y \in [0, 1]$ tel que $f(y) = 0$. Si $a > 1$, alors $f(1) < 0 < f(a)$ or il existe un $y \in [1, a]$ tel que $f(y) = 0$.

Corollaire 3.21. *Pour tout $r \in \mathbb{Q}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, x^r existe. (Si $r = (2n+1)/m$, avec $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, alors x^r existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.)*

On peut en déduire l'existence de x^s pour tout $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ (voir les exercices).

3.2.2 Le Théorème des bornes atteintes

Théorème 3.22 (Théorème des bornes atteintes)**.** *(Weierstrass 1861) Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors il existe $m, M \in [a,b]$ tels que pour tout $x \in [a,b]$, $f(m) \le f(x) \le f(M)$.*

Exemple 3.23. Pour voir pourquoi l'hypothèse que le domaine soit un intervalle fermé et borné est important : Soit $h\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Alors $h([0,\infty)) = (0,1]$; la fonction n'atteint pas son minimum.

En autre mots : l'image de la fonction f est borné (supérieurement et inférieurement) et contient son suprémum et son infimum.

Démonstration. Soit $F = \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ l'image de f. Démontrons que c'est un ensemble borné. Bien, si l'ensemble n'a pas de borne supérieure, on pourrait construire une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a,b]$ tel que pour chaque n, $f(x_n) > n$. Mais la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc admet une sous-suite $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente, par le théorème de Bolzano-Weierstrass. Puisque $[a,b]$ est fermé, sa limite c satisfait $c \in [a,b]$. Puisque f est continue, $f(x_{n_k}) \to f(c)$; mais par construction on avait $f(x_{n_k}) \to \infty$, contradiction. Donc F est borné supérieurement.

(Exercice : démontrer que F est borné inférieurement aussi.)

Soient

$$S = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\} \quad \text{et} \quad I = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}.$$

Alors il nous reste à démontrer qu'il existe $m, M \in [a,b]$ tels que $f(m) = I$ et $f(M) = S$. On fait le premier ; l'autre est un exercice.

Soit $n \ge 1$. Alors puisque $I = \inf F$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $I \le f(x_n) < I + \frac{1}{n}$. Donc $\{f(x_n)\}_{n\ge1}$ converge vers I. Puisque $[a,b]$ est borné, la suite $\{x_n\}_{n\ge1}$ est bornée et admet une sous-suite convergente (par le théorème Bolzano-Weierstrass). Notons sa limite m. Puisque $[a,b]$ est fermé, $m \in [a,b]$ (par Théorème 2.15). La sous-suite correspondante de $\{f(x_n)\}_{n\ge1}$ converge vers également vers I ; donc par la continuité de f, $f(m) = I$. □

Corollaire 3.24. *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et non-constante. Alors il existe $I, S \in \mathbb{R}$ tels que $f([a,b]) = [I,S]$, c-à-d, que l'image d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné.*

Démonstration. Soit f non-constante et continue. Par le théorème des bornes atteintes, il existe m, M tels que $f(m) = I = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ et $f(M) = S = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. Puisque f n'est pas constante, $m \ne M$. Par construction, $f([a,b]) \subseteq [I,S]$. Supposons que $m < M$ (l'autre cas étant un exercice). Alors $[m,M] \subseteq [a,b]$. Puisque f est continue sur $[m,M]$, par le théorème des valeurs intermédiaires, $[I,S] \subseteq f([m,M])$. Donc $[I,S] = f([a,b])$, cqfd. □

3.2.3 Exercices

1. Donner une fonction continue avec domaine qui n'est pas un intervalle fermé et borné, telle que son image n'est pas un intervalle.
2. Donner une fonction (discontinue) pour quelle la conclusion de chaque théorème est fausse.

3. Compléter les détailes la preuve des deux théorèmes, comme indiqué. (C'est facile quand vous auriez compris la preuve ; et impossible autrement.)
4. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires afin de démontrer l'existence d'une racine du polynôme $f(x) = x^4 + 3x^3 + 42x - 1$. Trouver une racine, à un décimale près.
5. Appuyer le théorème des valeurs intermédiaires afin de démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ telles que $f(a) < g(a)$ et $f(b) > g(b)$, alors il existe un point $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = g(x)$.
6. Appuyer le théorème des valeurs intermédiaires afin de démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b] \subset [1, \infty)$ telles que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, et $0 < \frac{f(a)}{a} < \frac{g(a)}{a}$ et $\frac{f(b)}{b} > \frac{g(b)}{b} > 0$, alors il existe un point $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = g(x)$.
7. Appuyer le théorème des bornes atteintes afin de démontrer le resultat suivant. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et *contractante*, qui veut dire que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|f(x) - f(y)| < |x - y|$. Démontrer que l'image de n'importe quel intervalle fermé et borné par la fonction f est un intervalle fermé et borné strictement plus courte. (La longueur d'un intervalle $[a, b]$ est $b - a$.)
8. Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite (peut-être divergente) dans $[a, b]$. Démontrer que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente.
9. Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et non constante. Démontrer qu'il existe un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) \in \mathbb{Q}$.
10. Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \in \mathbb{Q}$. Démontrer que f est une fonction constante.
11. Donner un exemple d'une fonction $f\colon A \to \mathbb{R}$, définie et continue pour tout x dans sont domaine $A \subseteq \mathbb{R}$, telle qu'il existe $a, b \in A$ et un z entre $f(a)$ et $f(b)$ tel qu'il n'existe aucun $x \in [a, b]$ avec $f(x) = z$. (Indice : comparer soigneusement cet exercice avec l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.)
12. Démontrer qu'il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $(x^2 - 3)e^{x^2+7}\sin(x) = 1$. (Vous pouvez supposer Théorème 3.9.)
13. (plus difficile) Démontrons l'existence de la fonction $f(x) = a^x$, pour un $a > 0$.
    (a) On a démontré que pour tout $a > 0$ et $r \in \mathbb{Q}$, il existe $y \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $y^n = a$. Démontrez que cette valeur est unique, c-à-d, si $y^n = a$ et $z^n = a$ et $y, z \in \mathbb{R}_{>0}$ alors $y = z$. Il suit que la fonction $f_a\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = a^x$ est bien définie.
    (b) Suppose que $a > 1$. Démontrer que f est une fonction croissante, c-à-d, pour tout $x < y$, $f(x) < f(y)$.
    (c) Soit $c \in \mathbb{R}$. Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante en $\mathbb{Q}$ qui converge vers c. Démontrer que si $c \in \mathbb{Q}$ alors $f_a(x_n) \to f_a(r)$. Si $c \notin \mathbb{Q}$, démontrer que la suite $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
    (d) Démontrer que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites croissantes en $\mathbb{Q}$ qui convergent vers c alors $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n)$. Donc on pose $f_a(c)$ la valeur commune de cette limite.
    (e) *Démontrer que f_a en continue en c.

Chapitre 4

La dérivée et les séries

Notre but dans ce chapitre est d'approfondir nos connaissances de la dérivée. On commence en reliant ce qu'on connait avec notre notion précise de la limite d'une fonction. Puis, on démontre le théorème de la valeur moyenne, qui implique le théorème fondamental de calcul différentiel et intégral. Une conséquence ensuite : les approximations de Taylor. Ceci nous amènera à des questions de séries générales, et puis finalement les séries de Taylor.

4.1 La dérivée d'une fonction

Soit $f \colon U \to \mathbb{R}$.

Définition 4.1. (Dû à Cauchy, 1821) Si $c \in (a, b) \subseteq U$ [1], alors f est *différentiable* (ou *dérivable*) au point c si

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

existe. Si cette limite existe, on la dénote $f'(c)$ ou $\dfrac{df}{dx}(c)$. Une fonction est dérivable si elle est dérivable en tout point à l'intérieure du domaine.

En termes de suites, être dérivable en c veut dire : pour toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en U qui converge vers c, telle que $x_n \neq c$ pour tout n, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} = f'(c).$$

Exemple 4.2. Soit $f(x) = x^2$. Démontrons que f est dérivable en c pour tout $c \in \mathbb{R}$.

1. Il faut éviter de parler de la dérivabilité d'une fonction à un point tel qu'on ne peut pas l'approcher des deux bords ; donc on insiste que le point c est strictement à l'intérieur du domaine.

Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ qui converge vers c, telle que $x_n \neq c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On calcul

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - c^2}{x_n - c} \\ &= \lim_{n\to\infty} (x_n + c) \\ &= c + c = 2c\end{aligned}$$

par l'algèbre de suites convergentes. Donc f est dérivable en c et $f'(c) = 2c$.

Exemple 4.3. Soit $f(x) = |x|$. Démontrer que f n'est pas dérivable en $c = 0$.

Posons $x_n = \frac{1}{n}$; c'est une suite dans le domaine de f, qui n'est jamais 0, et qui converge vers 0. Puisque $f(x_n) > 0$ pour tout n, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - 0}{x_n - 0} = 1.$$

Par contre, si on pose $x_n = -\frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, alors c'est encore une suite dans le domaine de f, qui n'est jamais 0, et qui converge vers 0. Mais puisque $f(x_n) < 0$ pour tout n, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} = \lim_{n\to\infty} \frac{-x_n - 0}{x_n - 0} = -1.$$

Donc la limite du quotient $\frac{|x|-0}{x-0}$ n'existe pas lorsque x tend vers 0 ; or la fonction n'est pas dérivable en 0.

Remarque 4.4. C'est vrai que

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(voir les exercices). Par contre, il ne suffit pas de remarquer que $f'(x)$ ne pourrait alors jamais être continue en 0, car il existe de fonctions f telles que f' existe mais n'est pas continue. (Voir les exercices) Donc la manque de continuité de la dérivée de suffit pas pour conclure qu'il n'existe pas. (Comparer avec Proposition 4.5, qui dit quelque chose de différent.)

4.1.1 Conséquences de la définition de la dérivabilité

On peut démontrer plusieurs conséquences de la dérivabilité avec cette définition.

Proposition 4.5. *Si f est dérivable en c alors f est continue en c.*

Démonstration. Soit f dérivable en c et soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite en U qui converge vers c, telle que $x_n \neq c$ pour tout n. Alors puisque

$$f(x_n) - f(c) = \left(\frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c}\right)(x_n - c)$$

est un produit de suites convergentes, il suit par le théorème d'algèbre de suites convergentes que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to\infty}\left(f(c) + \left(\frac{f(x_n)-f(c)}{x_n-c}\right)(x_n-c)\right)\\ &= f(c) + \left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(x_n)-f(c)}{x_n-c}\right)\right)\left(\lim_{n\to\infty}(x_n-c)\right)\\ &= f(c) + f'(c)\cdot 0\\ &= f(c).\end{aligned}$$

Il suit que $f(x_n) \to f(c)$, alors f est continue en c. □

Rappel : c est un *maximum local* de f s'il existe un intervalle (a, b) dans le domaine de f qui contient c tel que pour tout $x \in (a, b)$, $f(x) \leq f(c)$. C'est un *minimum local* s'il existe un intervalle (a, b) dans le domaine de f qui contient c tel que pour tout $x \in (a, b)$, $f(x) \geq f(c)$. Dans les deux cas, on dit que c est un extremum local.

Proposition 4.6. *Si la fonction f atteint un extremum local en un point c où elle est différentiable, alors $f'(c) = 0$.*

Démonstration. On suppose que f atteint un maximum local en c ; le cas d'un minimum local est semblable et est laissé comme exercice. On calcul $f'(c)$ avec deux suites différentes afin de contraindre sa valeur.

Puisque f est un maximum local, il existe un intervalle (a, b) dans le domaine de f tel que $c \in (a, b)$ et pour tout $x \in (a, b)$, $f(x) \leq f(c)$.

Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de (a, c) qui converge vers c. Alors pour tout n, $f(x_n) - f(c) \leq 0$ et $x_n - c < 0$, donc

$$\frac{f(x_n)-f(c)}{x_n-c} \geq 0.$$

Il en suit que $f'(c)$, qui est la limite de cette suite, satisfait $f'(c) \geq 0$.

Puis, soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de (c, b) qui converge vers c. Alors pour tout n, $f(x_n) - f(c) \leq 0$ et $x_n - c > 0$, donc

$$\frac{f(x_n)-f(c)}{x_n-c} \leq 0.$$

Il en suit que $f'(c)$, qui est la limite de cette suite, satisfait $f'(c) \leq 0$.

On conclut que $f'(c) = 0$. □

On a appris plusieurs conséquences de la dérivabilité en MAT1720. Voici un sommaire de résultats qui sont vrai et que vous pouvez utiliser dès maintenant ; vous en démontreriez quelques-un dans les exercices.

Proposition 4.7. *1. Si f et g sont dérivables en c, alors $f+g$, fg et rf (pour n'importe quelle constante r) sont dérivables en c. De plus, $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$, $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$ et $(rf)'(c) = r(f'(c))$.*

2. *Si g est dérivable en c et $g(c) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ est aussi dérivable en c. De plus, si f est dérivable en c,*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{g(c)f'(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}.$$

3. *Si : la composée $f \circ g$ est définie en c ; g est dérivable en c ; et f est dérivable en $g(c)$; alors $f \circ g$ est dérivable en c. De plus, $(f \circ g)'(c) = f'(g(c))g'(c)$.*
4. *Les fonctions suivantes sont dérivables sur leur domaine : e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\ln(x)$, $\arctan(x)$.*
5. *Pour un $r \in \mathbb{R}_{>0}$ fixe, la fonction x^r est dérivable sur $(0, \infty)$.*
6. *Les fonctions $\arcsin(x)$ et $\arccos(x)$ sont dérivables sur l'intervalle ouvert $(-1, 1)$.*

4.1.2 Le théorème des accroissements finis

Le théorème des accroissements finis (Mean Value Theorem) affirme que si f est une fonction dérivable, alors sa valeur moyenne sur un intervalle est égale à sa dérivée en au moins un point de l'intervalle. C'est l'énoncé qu'on utilise pour conclure que si vous avez conduit la distance de Ottawa à Montréal (200 km) en 1.5 heures, alors votre vitesse a été de 133 km/h à au moins un instant.

On commence avec une version du théorème plus simple.

Théorème 4.8 (Théorème de Rolle)**.** *Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est dérivable sur (a, b). Si $f(a) = f(b)$ alors il existe un $c \in (a, b)$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. Puisque f est continue, par le théorème des bornes atteintes, il existe $m, M \in [a, b]$ tels que $f(m) \leq f(x) \leq f(M)$ pour tout $x \in [a, b]$. Si $f(m) = f(M)$, alors f est une fonction constante sur $[a, b]$, et il en suit directement que $f'(c) = 0$ pour tout $c \in (a, b)$.

Autrement, on a $f(m) < f(M)$. Si $f(a) = f(m)$ posons $c = M$; autrement, posons $c = m$. Alors $c \neq a$, et puisque $f(a) = f(b)$, $c \neq b$. Donc $c \in (a, b)$, et donc il est un extremum local. Par la proposition précédente, $f'(c) = 0$. □

Théorème 4.9 (Le théorème des accroissements finis)**.** *(Lagrange, 1787) Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est dérivable sur (a, b). Alors il existe un $c \in (a, b)$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Démonstration. L'idée clef de la preuve est de modifier la fonction afin de pouvoir appliquer le Théorème de Rolle. En esquissant le graphe de f, on voit qu'on pourrait soustraire de f la fonction linéaire qui passe par les deux points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Sa pente est

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

et alors son équation est $y = f(a) + m(x - a)$. Alors soit h la fonction

$$h(x) = f(x) - f(a) - m(x - a).$$

C'est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b) ; évidement

$$h(a) = f(a) - f(a) - m(a - a) = 0$$

et on calcule que

$$h(b) = f(b) - f(a) - m(b - a) = (f(b) - f(a)) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(b - a) = 0$$

aussi. Alors par le Théorème de Rolle, il existe un point $c \in (a, b)$ tel que $h'(c) = 0$. Puisque $h'(x) = f'(x) - m$, nous concluons que

$$f'(c) = m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

or le resultat. $\square$

4.1.3 Exercices

1. Démontrer que la fonction $f(x) = x$ est dérivable. Déduire, en appuyant le Proposition 4.7, que toute fonction polynomiale est dérivable.
2. Démontrer que si f et g sont deux fonctions dérivables sur (a, b) alors pour tout $c \in \mathbb{R}$, les fonctions cf, $f + g$ et fg sont dérivables sur (a, b) aussi, et démontrer la formule pour leur dérivée.
3. Démontrer que si f et g sont deux fonctions dérivables sur (a, b) et $c \in (a, b)$ est tel que $g(c) \neq 0$, alors il existe un intervalle $(c - r, c + r)$ dans (a, b) tel que $\forall x \in (c - r, c + r)$, $g(x) \neq 0$. De plus, la fonction f/g est dérivable en c. Démontrer la formule pour sa dérivée.
4. (plus difficile) Démontrer que la composée de deux fonctions dérivables est dérivable, et démontrer la règle correspondante.
5. Soit $g(x)$ une fonction bornée (mais peut-être pas dérivable). Démontrer que $x^2 g(x)$ est dérivable en 0. Donner un exemple de g tel que $xg(x)$ n'est pas dérivable en 0.
6. Lesquelles des fonctions suivantes sont dérivables au point c indiqué ?
   (a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 2 \\ 6 - x & \text{si } x < 2 \end{cases}$, $c = 2$
   (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$, $c = 0$
7. Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction
   $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
   Démontrer que cette fonction est continue sur $[-1, 1]$ mais n'est dérivable ni en $c = 1$ ni en $c = -1$. Est-ce qu'on a le droit d'appliquer le théorème de Rolle à f sur l'intervalle $[-1, 1]$?
8. Soit f une fonction définie en parties. Soit g une fonction dérivable sur son domaine.
   (a) Démontrer que si U est un intervalle *ouvert* telle que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in U$, alors f est dérivable à tout point de U.

(b) Par contre, donner un exemple d'une fonction f définie en parties et une fonction g dérivable sur tout $\mathbb{R}$, telle que f coincide avec g sur un intervalle *fermé*, mais que f n'est pas dérivable à une extremité de l'intervalle.

9. Soient g et h des fonctions dérivables telles que g' et h' sont continues (donc, une hypothèse très forte !), et soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < c \\ h(x) & \text{si } x \geq c \end{cases}$$

En appuyant la définition de la dérivée en c, et les hypothèses donnés, démontrer que si $g(c) = h(c)$ et $g'(c) = h'(c)$ alors f est dérivable en c, donc pour tout x.

10. Soit f une fonction telle que sa dérivée est continue. Donner une preuve du théorème des accroissements finis sous cet hypothèse additionnel, en s'appuyant cette fois sur le théorème des valeurs intermédiaires pour la fonction f'.

11. Montrer que la fonction suivante est continue et dérivable mais que sa dérivée n'est pas continue. (Ceci justifie pourquoi le théorème des valeurs intermédiaires ne suffit pas pour démontrer le théorème des accroissements finis.)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Indice : puisque $x^2 \sin(1/x)$ est la composée de fonctions dérivables pour tout $x \neq 0$, elle est dérivable. Donc on n'a que deux choses à vérifier en $c = 0$: est-ce que la fonction y est dérivable, et si oui, est-ce que la dérivée y est continue.

12. Cauchy (1789–1857) a démontré la version plus générale du Théorème des accroissements finis, suivante.

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b), telles que $g(b) \neq g(a)$. Alors il existe $c \in (a, b)$ tel que $g'(c) \neq 0$ et

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

(a) Expliquer comment la version du Théorème des accroissements finis dans cette section suit de celui de Cauchy.

(b) Soit

$$h(x) = f(x) - f(a) - (g(x) - g(a)) \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right).$$

Vérifier que h satisfait les hypothèses du Théorème de Rolle. Démontrer ensuite le théorème de Cauchy.

(c) (bonus) Démontrer la version plus forte (sans les restrictions sur g) : Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b). Alors il existe $c \in (a, b)$ tel que $f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$.

13. Une version de la règle de l'Hospital est : Soient f et g deux fonctions dérivables telles que $f(c) = g(c) = 0$. Si

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe et vaut $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda.$$

Démontrer ce resultat, en vous appuyant sur la version de Cauchy du théorème des accroissements finis. Vous pouvez supposer que $g(x) \neq 0$ quand $x \neq c$, afin de simplifier la preuve.

4.2 Applications

4.2.1 Le théorème fondamental de calcul différentiel et intégral (optionelle)

Le théorème fondamental de calcul différentiel et intégral constate, en bref, que la dérivée et l'intégral sont des opérations inverses, dans un sens précis. Ici, on démontrer une partie de ce théorème avec l'aide du théorème des accroissements finis.

Un petit rappel sur les sommes de Riemann de f sur $[a, b]$. Soit $n \in \mathbb{N}_+$. Poser $\Delta x = (b - a)/n$ et pour chaque $i\imath\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, poser $x_i = a + i\Delta x$. Alors une somme de Riemann de f sur $[a, b]$ en n parties est n'importe quelle somme de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$$

pour un choix de ξ_i dans chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$. Cette somme représente l'aire (avec signe) de la réunion de n rectangles, en guise d'estimer l'aire (signé) sous la courbe $y = f(x)$ (c-à-d, l'intégrale). Le resultat clef : peu importe votre algorithme pour choisir les ξ_i, si f est intégrable [2] alors les sommes convergent vers $\int_a^b f(x)\, dx$ quand n tend vers ∞.

Lemme 4.10. *Soit $F\colon [a.b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérvable sur (a, b), telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in (a, b)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une somme de Riemann S_n de f sur $[a, b]$ avec n parties telle que $S_n = F(b) - F(a)$.*

Démonstration. Les hypothèses du théorème des accroissements finis sont satisfaits pour la fonction F sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$. Donc pour chaque i, il existe un $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tel que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x.$$

On prend la somme de $i = 1$ à n ; la côté droite est alors une somme de Riemann S_n, tandis que la côté gauche devient

$$(F(x_n) - F(x_{n-1})) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \cdots + (F(x_1) - F(x_0)) = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

□

Théorème 4.11 (Théorème Fondamental, Partie II)**.** *Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est dérivable sur (a, b) et telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in (a, b)$. Alors*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

2. On définit cette notion en MAT2525 ; pour l'instant, veuillez accepter qu'on peut démontrer que toute fonction continue est intégrable.

Démonstration. Puisque f est continue, son intégrale $\int_a^b f(x)\, dx$ existe et est la limite de n'importe quelle suite de sommes de Riemann. Par le lemme, il existe une suite $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ de sommes de Riemann tel que $S_n = F(b) - F(a)$ pour tout n. Donc c'est une suite constante, et sa limite, qui est l'intégrale, vaut $F(b) - F(a)$. □

Remarque 4.12. La Partie I du théorème fondamental donne l'autre implication de la reciprocité de la dérivée et de l'intégrale. En MAT2525, on la démontre avec une version du théorème des accroissements finis pour les intégrales.

Théorème 4.13 (Théorème Fondamental, Partie I)**.** *Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Définir la fonction $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ par la formule*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Alors F est dérivable sur (a, b), où sa dérivée est f.

4.2.2 Les fonctions croissantes et décroissantes

Le théorème des accroissements finis est exactement l'outil dont on a besoin quand on veut tirer une conclusion concernant le comportement locale d'une fonction à partir du comportement de sa dérivée. Voici un exemple typique.

Proposition 4.14. *Soit $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si pour tout $x \in (a, b)$, on a $f'(x) > 0$, alors f est croissante.*

Démonstration. C'est impossible de démontrer ce resultat uniquement de la définition de la dérivée, puisque la dérivée $f'(c)$ ne nous dit que la limite quand on tend vers c. Mais avec le théorème des accroissements finis, c'est facile.

Soient $c < d$ deux éléments de l'intervalle (a, b). Il faut démontrer que $f(c) < f(d)$. Le théorème des accroissements finis s'applique à la fonction f sur l'intervalle $[c, d]$, alors on conclut qu'il existe un $r \in (c, d)$ tel que

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c} = f'(r).$$

Puisque $f'(r) > 0$ et $d - c > 0$, il en suit que $f(d) > f(c)$. □

Remarque 4.15. On peut également démontrer que si $f'(x) < 0$ sur un intervalle, alors la fonction y est décroissante ; et si $f'(x) = 0$ sur in intervalle, alors elle y est constante. Voir les exercices.

4.2.3 Une autre application de la dérivée : les approximations de Taylor

Nous avons démontré les trois théorèmes qui sont les fondaments sur lequel le calcul différentiel et intégral est construit :

(1) Le théorème des valeurs intermédiaires, qui dit que les fonctions continues ne peuvent pas sauter au-dessus de valeurs (Théorème 3.14) ;

(2) Le théorème des bornes atteintes, qui dit que toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné doit atteindre sa valeur maximale et sa valeur minimale (Théorème 3.22) ; et
(3) Le théorème des accroissements finis, qui dit que le taux de croissance moyenne d'une fonction dérivable est atteinte comme le taux de croissance instantané en au moins un point (Théorème 4.9).

En calcul différential, nous avons introduit *l'approximation linéaire* d'une fonction dérivable f à la valeur $x = a$. C'est la fonction avec graphe égale à la droite tangente à la courbe au point $(a, f(a))$, qui est donc

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Le calcul différentiel nous promet que si x est proche à a, alors $f(x)$ est proche à $L(x)$ — donc $L(x)$ donne une approximation rudimentaire à $f(x)$.

La question qu'on se pose : et si on cherchait une meilleure approximation, par un polynôme, par exemple ? Comment y s'impliquerait la notion de la dérivée ?

Bien, soit $p(x)$ un polynôme arbitraire et $a \in \mathbb{R}$. On peut développer le polynôme afin de la centrer en a, de la façon suivante :

$$p(x) = b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2 + b_3(x - a)^3 + \cdots + b_n(x - a)^n.$$

(Par exemple, si $p(x) = x^2$ et $a = 2$ alors, en commençant avec la puissance la plus haute, on réussi à écrire $p(x) = 4 + 4(x - 2) + (x - 2)^2$.) Remarquons que

$$\begin{aligned} p(a) &= b_0 \\ p'(a) &= b_1 \\ p''(a) &= 2b_2 \\ p'''(a) &= 6b_3 \end{aligned}$$

et en général,

$$p^{(n)}(a) = n!b_n,$$

où $n! = n(n - 1)(n - 2) \cdots 2 \cdot 1$.

Donc les coéfficients du polynôme, quand il est écrit centré en une valeur a, sont les dérivées de $p(x)$ (divisée par un nombre comme $n!$). Notre approximation linéaire était le polynôme de degré 1 tel que $p(a) = f(a)$ et $p'(a) = f'(a)$. Il en suit que notre "meilleure approximation polynômiale" de degré de f en a est

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n. \tag{4.1}$$

C'est le *polynôme de Taylor de degré n de f centré en a*. Au besoin, on peut ajouter le f ou le a à la notation ($T^f_{n,a}(x)$) quand il s'agit de plusieurs fonctions ou points.

Exemple 4.16. Soient $f(x) = e^x$ et $a = 0$. Puisque $f^{(n)}(x) = e^x$ pour tout n, on a $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, et donc le polynôme de Taylor de e^x en 0 de degré n est

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n.$$

De même, le polynôme de Taylor de degré n de e^x en a est

$$T_{n,a}(x) = e^a + e^a(x - a) + \frac{e^a}{2}(x - a)^2 + \cdots + \frac{e^a}{n!}(x - a)^n.$$

Remarque 4.17. Veuillez noter que $T_n(x)$ est un polynôme en x — le “a” qui apparaît dans la définition de $T_n(x)$ est une *constante*. Si vous vous retrouvez avec une expression en x comme coéfficient, vous vous êtes trompé !

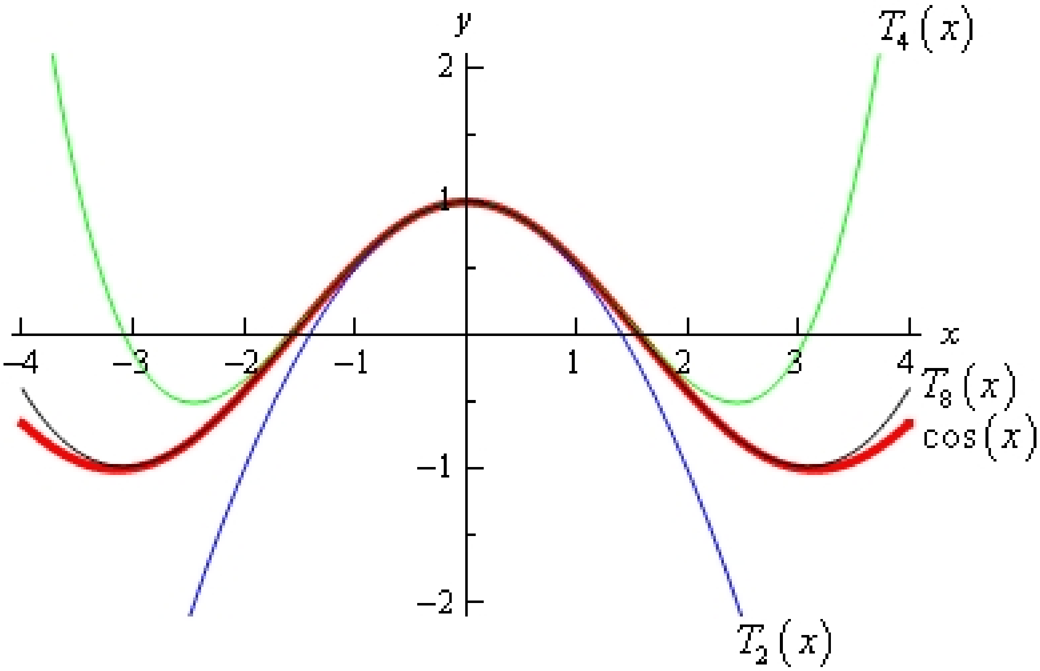


FIGURE 4.1 – La fonction $\cos(x)$ comparée avec ces premières approximations par polynômes de Taylor. Cet image vient du site web `http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcII/TaylorSeriesApps.aspx` dont Paul Dawkins retient tous les droits d'auteur.

Exemple 4.18. Calculons les polynômes de Taylor de la fonction $f(x) = \cos(x)$, centré en 0.

	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$
$f(x)$	$\cos(x)$	1	1
$f'(x)$	$-\sin(x)$	0	0
$f''(x)$	$-\cos(x)$	-1	$-\frac{1}{2}x^2$
$f'''(x)$	$\sin(x)$	0	0
$f^{(4)}(x)$	$\cos(x)$	1	$\frac{1}{4!}x^4$

Donc on a

$$T_0(x) = T_1(x) = 1; T_2(x) = T_3(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

et

$$T_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4.$$

On peut facilement déduire que

$$T_n(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n}.$$

Les premières approximations sont données en Fig.4.1.

Exemple 4.19. Soient $f(x) = \ln(x)$ et $a = 1$. On calcul

	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$	$\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$
$f(x)$	$\ln(x)$	0	0
$f'(x)$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	1	$(x-1)$
$f''(x)$	$-x^{-2}$	-1	$-\frac{1}{2}(x-1)^2$
$f'''(x)$	$2x^{-3}$	2	$\frac{2}{3!}(x-1)^3$
$f^{(4)}(x)$	$-6x^{-4}$	$-(3!)$	$\frac{-3!}{4!}(x-1)^4$

Alors

$$T_4(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$$

4.2.4 Le théorème de Taylor

Bon : on est d'accord que ses approximations ne sont pas difficiles à trouver. Mais la question évidente à se poser :

Quand est-ce que les approximations de Taylor sont des *bonnes* approximations ?

Théorème 4.20 (Théorème de Taylor)**.** *Soit f une fonction au moins $n+1$-fois dérivable en a ; alors $T_n(x)$ existe. Posons*

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x);$$

alors $R_n(x)$ est le reste (ou l'erreur) de cette approximation de Taylor. Pour chaque x dans le domaine de f, il existe un nombre c entre a et x tel que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

(Notons que cette valeur est semblable, mais pas égale, à $T_{n+1}(x) - T_n(x)$.)

Il suit qu'un polynôme de Taylor sera une bonne approximation à f dans un intervalle $(a-r, a+r)$ si la $n+1$-ième dérivée $f^{(n+1)}(x)$ est bornée par une valeur assez petite, et qu'on peut bien estimer l'erreur $R_n(x)$ pour chaque x.

Le c qui intervient dans la formule dépend du choix de x ! En plus, c'est rare qu'on arrive à déterminer c précisement. Donc la façon plus pratique pour appuyer ce théorème est comme suit.

Soit $r > 0$. S'il existe un $M_n \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $|f^{(n+1)}(x)| \leq M_n$ pour tout $x \in [a-r, a+r]$, alors

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_n}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

pour tout $x \in [a-r, a+r]$.

On vous laisse la démonstration de ce théorème, qui utilise une généralisation du Théorème des accroissements finis, comme un exercice intéressant.

Exemple 4.21. Soit $f(x) = e^x$. Pour tout $r > 0$, et tout $x \in [-r, r]$, $|f^{(n+1)}(x)| \leq e^r$ alors on peut prendre $M_n = e^r$ pour tout n. Alors pour tout $x \in [-r, r]$, l'erreur $R_n(x)$ va satisfaire

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^r}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

Remarquer que pour tout r fixe, $|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}e^r r^{n+1}$, qui tend vers 0 quand $n \to \infty$ (exercice).

Donc en particulier c'est vrai que si on fixe $r > 0$ et $\varepsilon > 0$, il existe un n tel que pour tout $x \in [-r, r]$, $|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon$. Dans ce sens, on peut dire qu'il existe des bonnes approximations de Taylor de la fonction e^x.

Exemple 4.22. Soient $f(x) = \ln(x)$ et $a = 1$. Posons l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ autour de a. En continuant l'exemple de la section précédente, on peut démontrer par recurrence que

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}.$$

Si $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ on a

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq \frac{n!}{(\frac{1}{2})^{n+1}} = n! 2^{n+1} = M_n,$$

qui est énorme. Quand même, quand on calcule le reste, on obtient

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &\leq \frac{2^{n+1}}{(n+1)}|x-1|^{n+1} \\
&\leq \frac{2^{n+1}}{n+1}\left|\frac{1}{2}\right|^{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Puisque ceci tend vers 0 quand $n \to \infty$, il en suit que pour chaque $\varepsilon > 0$, on peut choisir n tel que $|T_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

Exemple 4.23. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, trouver une borne sur le reste de Taylor $R_n(x)$ de la fonction $\cos(x)$ centrée en 0, sur un intervalle $[r, r]$.

Solution : Puisque $f^{(n)}(x)$ est une des quatre fonctions $\pm\sin(x)$ ou $\pm\cos(x)$, il suit que pour tout n et pout tout x, on a $|f^{(n+1)}(x)| \leq 1$. Donc pour tout $x \in [-r, r]$, on a

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}|x-0|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Par exemple, au point $x = \pi$, on a $\cos(1) \simeq 0.54030$ tandis que $T_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \simeq 0.54167$; ce n'est pas mal. Voyons que sur $[-1, 1]$ on avait $|R_4(x)| \leq \frac{1}{5!} \simeq 0.00833$ tandis que $f(1) - T_4(1) = -0.00137$. Donc notre borne sur l'erreure était correct.

Par contre, sur $[-\pi, \pi]$, notre borne sur $|R_n(x)|$ sera $\pi^5/5! \simeq 2.55$; ce n'est pas très bon, mais on comprend pourquoi en regardant Fig. 4.1.

Quand même, on remarque que pour toute constante r, $\lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, or il suit que pour tout $x \in [-r, r]$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Donc, pour tout x, on peut choisir un n assez grand tel que $T_n(x)$ est une bonne approximation à $\cos(x)$. (Typiquement, on choisit $r = x$ pour trouver n, car notre estimation de l'erreur grandit avec r.)

L'algorithme :

(1) Choisir $r > 0$, tel que $[a - r, a + r]$ est dans le domaine de f.

(2) Trouver la valeur maximale de $|f^{(n+1)}(x)|$ pour $x \in [a - r, a + r]$; soit M_n cette valeur.

(3) Alors pour tout $x \in [a - r, a + r]$,

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)| < \frac{1}{(n+1)!} M_n |x - a|^{n+1} \leq \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} M_n.$$

Par contre, faites attention ! Puisque M_n dépend de n (et donc pourrait croître avec n) il ne suit pas que toute fonction f admet des polynômes de Taylor qui sont des bonnes approximations.

Quand même, dans les exemples précédents, on a calculé M_n pour tout n et on a pu déduire que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Donc, la prochaine question devient : et si on se permet de considérer $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$? Qu'est-ce que ça veut dire, et est-ce que c'est égale à $f(x)$?

Mais afin de poursuivre cette idée, il faut qu'on aborde la question de comment interpreter "une somme infini" — et de comprendre comment qu'ils peuvent dérailler.

4.2.5 Exercices

1. Démontrer que si $f'(x) < 0$ sur un intervalle, alors la fonction y est décroissante ; et si $f'(x) = 0$ sur in intervalle, alors elle y est constante.
2. Soit f une fonction polynomiale de degré n. Démontrer que $f(x) = T_n(x)$, pour tout choix de centre a. Quel est $T_{n+1}(f)$?
3. Soit f une fonction et posons $f' = \frac{d}{dx} f$ sa dérivée. Soit a une constante. Définir $f'(a)$ et $\frac{d}{dx} f(a)$. Démontrer que ce deuxième est 0.
4. Soit f une fonction n-fois dérivable en a. Soit $T_n(x)$ son polynôme de Taylor de degré n comme en (4.1).
   (a) Démontrer en utilisant cette formule que $T_n(a) = f(a)$.
   (b) Trouver $T_n'(x)$. Démontrer que $T_n'(a) = f'(a)$.
   (c) Trouver $T_n''(x)$. Démontrer que $T_n''(a) = f''(a)$.
   (d) Démontrer par recurrence que $T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$.

   Conseil : si vous n'y arrivez pas, remplacer les constantes a, $f(a)$, $f'(a)$, dans la formule (4.1) par des chiffres, et faites le calcul à nouveau. (Ne siimplifiez pas — vous voulez voir pourquoi c'est vrai en générale, et puis vous habituez à voir $f(a)$ comme étant une constante qui a dérivée nulle, et $f(x)$, qui a dérivée $f'(x)$.
5. Pour chacune des fonctions suivantes :

(i) calculer $T_3(x)$
(ii) évaluer explicitement $f(z) - T_3(z)$ pour la valeur de z indiqué,
(iii) déterminer la valeur maximale de (ou une borne supérieure de) $f^{(4)}(x)$ pour $x \in [-z, z]$,
(iv) trouver ensuite une borne supérieure de $R_3(z)$, à l'aide du Thm de Taylor, et
(v) comparer votre borne en (iv) avec votre valeur en (ii).

(a) $f(x) = \sin(x)$, $a = 0$, $z = \pi/2$
(b) $f(x) = \tan(x)$, $a = 0$, $z = 0.1$
(c) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $a = 1$, $z = \frac{1}{2}$

6. Utiliser la version de Cauchy du théorème des accroissements finis (Section 4.1.3) afin de démontrer le théorème de Taylor. Soit f une fonction $(n+1)$-fois dérivable sur (b, d) et soit $a \in (b, d)$. Soit $T_n(x)$ le polynôme de Taylor de degré n de f centré en a. Il faut démontrer que pour tout $x \in (b, d)$ il existe un c entre a et x tel que

$$f(x) - T_n(f)(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}.$$

Les étapes à suivre : On va supposer $x > a$ le cas $x < a$ étant semblable. Poser

$$S(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k.$$

C'est une fonction de t ; vérifier que les hypothèses du théorème des accroissements finis de Cauchy sont satisfaites par les fonctions $S(t)$ et $g(t) = (x-t)^{n+1}$. Calculer la dérivée $S'(t)$ soigneusement ; elle se simplifiera magnifiquement. Appuyer alors le théorème et en déduire le résultat cherché.

7. (a) Calculer $T_{4,\sec}(x)$ pour la fonction $\sec(x)$ en $a = 0$.
   (b) Étant donné que $\cos(x)\sec(x) = 1$, on se demande qu'arrive quand on prend le produit de leur polynômes de Taylor. Calculer $h(x) = T_{4,\cos}(x)T_{4,\sec}(x)$, en vérifiant que $h(x) - 1$ n'a aucun terme de degré moins que 5.

4.3 Les séries

Dans cette section, on veut comprendre la subtilité d'une expression comme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

4.3.1 La définition d'une série

Définition 4.24. Soit $\{a_n\}_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels. On définit une nouvelle suite par

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Alors :

1. La suite $\{s_n\}$ est dite une *série*, et on la dénote
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$
2. Les nombres s_n sont dit les *sommes partielles* de la série et les a_n sont les *termes* de la série.
3. La série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge ssi $\{s_n\}$ converge ; dans ce cas sa limite est dite sa somme.
4. Si $s_n \to s$ alors on écrit $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$.

Attention ! $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en général, puisque si ces séries sont convergentes, il faudra que
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$
Donc il faut faire attention où qu'on commence notre série.

4.3.2 Exemples

L'étude des séries a vu sont début dans les paradoxes de Zénon d'Élée, en particulier celui d'Achille et la tortue. Achille, le grand coureur réputé, propose à la tortue une course à pied, et lui accorde un avance de 1 arpent. Pour l'attraper, il faut qu'Achille avance d'un arpent. Mais aussitôt réussi, il faut qu'Achille avance de la distance que la tortue a parcouru pendant ce temps, un demi-arpent. Et aussitôt réussi, il doit encore rattraper la tortue, qui a avancé un quart d'un arpent. Et donc il ne gagnera jamais la course.

Exemple 4.25. La série du paradox d'Achille et la tortue est
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$
Plus généralement, soit $r \in \mathbb{R}$, et posons $a_n = r^n$ pour $n \geq 0$. *La série géométrique* est la série
$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n.$$
Calculons sa somme.

On discute le cas $r = -1$ et $r = 1$ dans les exercices ; ce sont des séries divergentes.

Si $r \neq 1$, la suite de sommes partiels est
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$
(qu'on voit on remarquant que $(1 - r)(1 + r + \cdots + r^n) = 1 - r^{n+1}$).

Si $|r| < 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}$$

puisque $-1 < r < 1$ implique que $\{r^{n+1}\} \to 0$. Par exemple,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} \right) = 2$$

qui est la série de Zénon.

Si $|r| > 1$, alors la suite r^{n+1} diverge, or la série diverge.

Exemple 4.26. Soit la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Les termes de cette série sont

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Il en suit que les sommes partielles sont

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

et donc que la limite des sommes partielles est de 1. Alors la série converge et nous avons

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

Exemple 4.27. *La série harmonique* est la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots .$$

Les termes deviennent de plus en plus petit ; mais est-ce qu'elles ralentissent assez pour converger vers une limite ?

Non ! Toute somme partielle de cette série représente une sur-estimation de l'aire sous la courbe $y = \frac{1}{x}$ entre $x = 1$ et $x = n+1$. Puisque celui-ci est

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$$

qui tend vers ∞, il en suit que les somme partielles divergent vers ∞. (C'est vrai que cette série diverge très lentement — mais elle diverge quand même.) On écrit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

On voit que si une série converge, alors forcément sa suite de termes a_n doit converger vers 0 (exercice). La contraposée nous donne un critère de divergence.

Lemme 4.28. *Soit* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *une série. Si la suite des termes* $\{a_n\}$ *ne converge pas à* 0*, c-à-d, si* $a_n \not\to 0$*, alors la série diverge.*

Exemple 4.29. La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

diverge car sa suite de termes $(-1)^n$ ne converge pas, donc en particulier, pas vers 0.

Lemme 4.28 n'est pas un “si et seulement si” ; on se souvient du cas de la série harmonique, qui est divergente même que ces termes tendent vers 0.

Notre prochain but est d'établir des critères de convergence pour les séries, et des outils pour en trouver leur sommes.

4.4 Tests de convergence : séries à termes positifs

Dans cette section, on suppose que les termes a_n de la suite sont tous non-négatifs.

On donne trois tests de convergence. Aucune entre eux est toujours applicable ou utile ; mais l'ensemble suffit pour décider la convergence de la majorité des séries intéressantes.

4.4.1 Test de comparaison

Si $a_n \geq 0$ pour tout n, alors les sommes partielles de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

forment une suite croissante, donc convergente ssi bornée. Ce fait, qui semble inutile, donne un critère de convergence/divergence très puissant.

Théorème 4.30 (Test de comparaison)**.** *Supposons qu'il existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq N$*, on a* $0 \leq a_n \leq b_n$*. Alors :*

1. *Si* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *converge, alors* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge.*
2. *Si* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *diverge, alors* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *diverge.*

Démonstration. Puisque les termes a_n, b_n sont non-négatifs, les séries $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ sont croissantes.

Si $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} b_n = b$, alors b est le suprémum de ses sommes partielles. Puisque $a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq N$, $\displaystyle\sum_{n=N}^{M} a_n \leq \sum_{n=N}^{M} b_n \leq b$ pour tout $M \geq N$. Donc la suite de somme partielles de la série $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ est bornée supérieurement par b ; il suit que cette série croissante est convergente.

De même, si $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ diverge, alors puisqu'elle est croissante, elle n'est pas bornée. Donc pour tout $K \in \mathbb{N}$, il existe un $M \geq N$ tel que $K \leq \displaystyle\sum_{n=N}^{M} a_n \leq \sum_{n=N}^{M} b_n$. Alors la suite de sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ n'est pas bornée non plus. Donc elle diverge.

Finalement, puisque $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge si et seulement si $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} c_n$ converge (exercice), le théorème est démontré. $\square$

Exemple 4.31. Puisque

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

par le test de comparaison, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ converge.

Puisque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

on conclut que cette série converge aussi. (Euler a démontré que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ — mais il nous faudra les outils beaucoup plus puissant pour le voir !)

Exemple 4.32. Avec le test de comparaison, on peut démontrer que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^k}$$

converge pour tout $k \geq 2$. (Exercice)

Exemple 4.33. Déterminer si ou non la série suivante converge :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{3n^2 + 2n - 1}{5n^3 + 2}.$$

Solution : cette fonction rationnel (c-à-d, quotient de polynômes en n) a un degré net de -1, comme $\frac{1}{n}$. Donc on va réussir à démontrer qu'elle diverge, puisque la série harmonique diverge, car les termes ne diminuent pas assez rapidement pour permettre la convergence. On pourrait tenter un argument avec l'intégrale, mais appuyons un test de comparaison.

Il suffirait de trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$ (bien sûr, notre choix préférée est $k = 0$, mais ça ne fait rien) tel que

$$\frac{3n^2 + 2n - 1}{5n^3 + 2} \geq \frac{\alpha}{n + k}.$$

Bien : pour $n \geq 1$ nous avons $2n - 1 \geq 0$ et $2 \leq 2n^3$ alors :

$$\frac{3n^2 + 2n - 1}{5n^3 + 2} \geq \frac{3n^2}{5n^3 + 2n^3} = \frac{3/7}{n}.$$

Donc pour tout n, les termes de notre suite sont plus grands que ceux d'un multiple de la suite harmonique, or notre série diverge par le test de comparasion.

Il y a beaucoup de choix possibles. L'important est de garder le degré net constante, et de choisir la direction de vos inégalités en fonction de ce que vous devez conclure.

Exemple 4.34. Soit

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n^2 - 7n + 20}{n^4 - 1}$$

Le degré net étant -2, cette série sera comparable à la série convergente $\sum \frac{1}{n^2}$; donc on va démontrer qu'elle converge.

On choisit nos comparaison comme suivant ; veuillez noter qu'il y a une infinité de choix d'étapes correctes qu'on aurait pu faire. L'important, c'est de tenir compte du fait qu'on veut absolument démontrer que notre fonction est PLUS PETIT que les termes d'une série plus simple.

$$\begin{aligned}
\frac{4n^2 - 7n + 20}{n^4 - 1} &< \frac{4n^2 + 20}{n^4 - 1} && \text{car } -7n < 0 \\
&< \frac{4n^2 + 20n^2}{n^4 - 1} && \text{car } 20 < 20n^2 \text{ pour } n \geq 2 \\
&< \frac{24n^2}{n^4 - n^3} && \text{car } -1 > -n^3 \text{ alors le dénom. décroit} \\
&= \frac{24}{n(n-1)} && \text{simplifiant} \\
&< \frac{24}{(n-1)^2} && \text{car } n > n - 1 \text{ alors le dénom. décroit}
\end{aligned}$$

Finalement, on note que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{24}{(n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{n^2}$$

et puisque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, il suit par l'algèbre de suites convergentes (ex) que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{n^2}$ converge aussi, et donc par le test de comparaison que notre série converge.

4.4.2 Test de l'intégrale

L'argument qu'on a appuyé pour conclure la divergence de la série harmonique est aussi une sorte de test de comparaison, qui s'appelle le *test de l'intégrale*. Elle opère sur le même principe, mais en reliant les sommes partielles d'une série à une suite d'intégrales.

Théorème 4.35. *Soit $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue, décroissante et telle que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1,\infty)$. Alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge si et seulement si la suite $\{\int_1^n f(x)\, dx\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ converge.*

Démonstration. Puisque f est décroissante, on a pour tout $k \in \mathbb{N}_+$ que

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\, dx \leq f(k)$$

en comparant les aires de rectangles avec l'aire sous la courbe. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}_+$ on a

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Ces trois suites sont des suites croissantes. Donc si $\sum_{n\geq 1} f(n)$ converge, alors sa valeur est une borne supérieure à la suite $\{\int_1^\infty f(x)\, dx\}_{n\in\mathbb{N}_+}$, qui est donc convergente aussi. De l'autre part, si la suite $\{\int_1^\infty f(x)\, dx\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ est convergente, sa limite est une borne supérieure de la suite de somme partielles de $\sum_{n\geq 2} f(n)$, or cette série converge. Il suit que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge aussi. □

Avec ce test, on peut démontrer que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$$

converge pour tout nombre réels $s > 1$ et diverge pour tout nombre réel $s \leq 1$.

Exemple 4.36. Par exemple, soit la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}},$$

avec $f(x) = x^{-3/2}$. Alors f est définie et continue sur $[1,\infty)$, et on vérifie directement que si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$, donc c'est décroissante. En plus elle prend uniquement valeurs positives. On calcule

$$\int_1^N x^{-3/2} dx = \left[-2x^{-1/2}\right]_1^N = 2 - \frac{2}{\sqrt{N}}.$$

Puisque cela converge lorsque $N \to \infty$, il suit de notre test d'intégrale que notre série converge.

4.4.3 Test de convergence : la règle d'Alembert

Théorème 4.37 (La règle d'Alembert)**.** *Soit $M \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq M$, $a_n > 0$. Suppose que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Alors
- *si $q < 1$, alors $\sum a_n$ converge ;*
- *si $q > 1$, alors $\sum a_n$ diverge ;*

– *autrement, on ne peut rien déduire.*

Démonstration. (1) Si $q > 1$, alors en posant $\varepsilon = q - 1$ on conclut par la convergence de la suite $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}_{n \geq M}$ vers q qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, nous avons

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q - \varepsilon = 1.$$

Il suit que $a_{n+1} > a_n > 0$. Donc la suite est une suite croissante de nombres strictement positifs, qui ne peut alors pas converger vers 0. Donc par Lemme 4.28, la série diverge.

(2) Si $q < 1$, alors puisque $q > 0$ on peut poser $r = \frac{1}{2}(1 + q)$, qui satisfait

$$0 < q < r < 1.$$

En posant $\varepsilon = r - q$, on conclut qu'il existe un $N \geq M$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon = r.$$

Il suit que $a_{n+1} < ra_n$. Donc pour tout $n \geq N$, on a

$$a_n < ra_{n-1} < r(ra_{n-2}) < \cdots < r^{n-N} a_N$$

or, pour $n > N$, nous avons la relation

$$a_n < \frac{a_N}{r^N} r^n = cr^n$$

où c représente la constante a_N / r^N. Mais puisque $0 < r < 1$, on sait que la série $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge, donc $\sum_{n=N}^{\infty} cr^n$ converge (voir les exercices), et donc par le test de comparaison, on peut conclure que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge.

(3) Voir les exercices. $\square$

Exemple 4.38. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de x est-ce que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ converge ?

Solution : on applique la régle d'Alembert.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|^{n+1}/(n+1)!}{|x|^n/n!} = \frac{|x|}{n+1}$$

qui converge vers $q = 0 < 1$ pour tout x. Donc cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple 4.39. Pour quelles valeurs de x est-ce que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n+1}$ converge ?

Solution : on applique la régle d'Alembert.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|^{n+1}/(n+2)}{|x|^n/(n+1)} = |x| \frac{n+1}{n+2}$$

qui converge vers $q = |x|$. Donc elle converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$.

Ce n'est pas évident qu'est-ce qu'y arrive quand $|x| = 1$; en effet, elle diverge en 1 et converge en -1.

4.4.4 Exercices

1. Soit la série $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n^2-10n+26)}$. Faites un changement de variable pour que cette série commence à index 0, c'est à dire, qu'elle ait la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Indice : choisir une autre variable, comme k, et trouver a_k tel que $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n^2-10n+26)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Puis renommer l'index.
2. Démontrer que si $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, alors la série $\sum_{n\geq 0} ca_n$ converge aussi pour toute constante c.
3. Démontrer que si $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge, alors la série $\sum_{n\geq 0} ca_n$ diverge pour toute contstant $c \neq 0$.
4. Démontrer que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergent, alors $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)$ converge vers $\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.
5. Comparer $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}\right)$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)\left(\frac{1}{3^n}\right)$. Conclure que le produit de deux séries n'est pas égale à la série dont on prend le produit des termes correspondantes.
6. Donner un exemple d'une série divergente $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ est convergente.
7. Démontrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge si et seulement si pour tout $N \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n\geq N} a_n$ converge. Est-ce qu'ils auront la même somme ?
8. Soit la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+4}{5n^3+42n+1}$. Quel est le degré net de ces termes (donc : quel est le degré du numérateur (tant que polynôme en n) moins le degré du dénominateur) ? Étant donné votre réponse, est-ce que vous anticipez que la série converge ou qu'elle diverge ? Pour faire un test de comparaison afin de démontrer ceci, quelle direction d'inégalité ($\leq$ ou $\geq$) en avez-vous besoin ?
9. De même, pour $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+4}{5n^4+42n+1}$.
10. (exercice très avancé) La *fonction zeta de Riemann* est une fonction $\zeta\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui, pour valeurs réels $s > 1$ est donnée par
$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}.$$
(C'est la fonction au centre du célèbre hypothèse de Riemann.) Démontrer Prove, avec un argument semblable à celui pour la série harmonique ($s = 1$), que $\zeta(s)$ converge pour tout $s > 1$. Cette fois, par contre, vous allez chercher une borne supérieure pour la série, pour conclure la convergence de sa suite croissante de sommes partielles. Puis, utiliser le these de comparaison afin de conclure la divergence de la série pour $s < 1$.
11. Considèrons la série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$. Si l'on regroupait les termes comme suit :
$$(1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots$$
on conclurait que la somme est 1. Ou bien, on pourrait regrouper les termes comme
$$(1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots$$
et donc la somme sera évidement 0. Ou bien par la formule de la série géométrique,
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}.$$

Ou bien on réarrangeant les termes, on pourrait dire que c'est

$$a_0 + a_2 + (a_1 + a_3 + a_4 + a_6) + (a_5 + a_7 + a_8 + _{10}) + \cdots = 2.$$

Discutez. Est-ce que ces calculs contredisent la définition de la convergence d'une série, ou l'unicité de la limite ?

12. Appuyer un test de l'intégrale pour démontrer que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4/3}$ converge et que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/4}$ diverge.
13. Démontrer que la suite de quotients $\{a_{n+1}/a_n\}_{n\geq 1}$ des termes de chacune des séries à termes positifs suivantes converge vers 1. Conclure le cas (3) de la règle d'Alembert :
    (a) La série harmonique (divergente !) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$
    (b) La série convergente $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$
14. Appuyer la règle d'Alembert à chacune des séries suivantes afin de déterminer si elles convergent.
    (a) $\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!}$
    (b) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^3}{e^n}$
15. Appuyer la règle d'Alembert à chacune des séries suivantes afin de déterminer pour quels choix de valeurs $x \in \mathbb{R}$ qu'elles convergent.
    (a) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}|x|^n$
    (b) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}|x|^n$

4.5 Retour aux approximations de Taylor

4.5.1 Les séries de puissances et les séries de Taylor

Soient $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, $a \in \mathbb{R}$ une constante, et x un variable réel. Alors la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$$

est appellée une *série de puissances* (centré en a).

Exemple 4.40.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n, \quad et \quad \sum_{n=0}^{\infty} n!(x-2)^n$$

sont des séries de puissances, mais $\sum_{n=0}^{\infty} n^x$ ne l'est pas.

Exemple 4.41. Soit f une fonction infiniment dérivable en a. Alors sa *série de Taylor* est la série de puissances donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

(La question qu'on se pose aujourd'hui : quand est-ce que cette série est égale à $f(x)$?)

Étant donné une série de puissances, on peut appliquer la règle d'Alembert à la série de termes en valeur absolue correspondante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n||x-a|^n$$

et donc déduire une valeur r telle que la série converge pour quand $|x-a| < r$ et diverge lorsque $|x-a| > r$. Cette valeur est dite ∞ si la série converge pour tout x ; et est 0 si la série ne converge qu'en $x = a$. On appelle r le *rayon de convergence* de la série.

Exemple 4.42. Le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ est 1 ; le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ est ∞ et le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-2)^n$ est 0. (Ex)

Exemple 4.43. Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+2)}(x-3)^n$. On applique la règle d'Alembert :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}(n+3)}|x-3|^{n+1}}{\frac{1}{2^n(n+2)}|x-3|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)|x-3|}{2(n+3)} = \frac{1}{2}|x-3|.$$

Donc la série converge si $\frac{1}{2}|x-3| < 1$ ou $|x-3| < 2$ et diverge quand c'est > 2. Donc le rayon de convergence est 2.

Lemme 4.44. *Si une série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.*

La démonstration est un exercice du DGD.

Donc il suit que si le rayon de convergence d'une série de puissances est de r, alors la série converge pour $x \in (a-r, a+r)$. Il en suit qu'on peut définir une fonction $f\colon (a-r, a+r) \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n.$$

Exemple 4.45. On a remarqué que si $|x| < 1$ alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

donc la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$ est égale à une série de puissances centrée en 0, sur l'intervalle $(-1, 1)$. (Mais la série n'est pas définie pour $x = -5$, par exemple, même que f l'est.)

L'interêt est le suivant.

Proposition 4.46. *Soit $r > 0$. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ une série de puissances avec rayon de convergence r. Définir la fonction $f\colon (a-r, a+r) \to \mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n.$$

Alors :

(a) $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nb_n(x-a)^{n-1}$;

(b) $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} b_n (x-a)^{n+1}$ *; et*

(c) cette série coincide avec la série de Taylor de f centrée en a, sur $(a-r, a+r)$, c'est à dire, $b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Les rayons de convergences des séries en (a) et (b) sont également r.

Donc *si* une fonction est déjà exprimable comme une série de puissances (en a), *alors* cette série est sa série de Taylor (en a).

Mais qu'arrive-t-il si on ne sait pas si $f(x)$ est égale à une série de puissances ?

Théorème 4.47. *Soit $R_n(x)$ le reste de Taylor de degré n de la fonction f en a. Soit $r > 0$. Si pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x-a| < r$ nous avons*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

alors $f(x)$ est égale à sa série de Taylor centrée en a, c-à-d :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

pour tout $x \in (a-r, a+r)$.

Exemple 4.48. Soit $f(x) = e^x$. On a vu que pour n'importe quel intervalle $(-r, r)$, et tout $x \in (-r, r)$, le reste de Taylor $R_n(x)$ tendait vers 0 lorsque $n \to \infty$. Donc e^x est égale à sa série de Taylor centrée en 0, c-à-d,

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

et le rayon de convergence est ∞.

Exemple 4.49. Soit $f(x) = \sin(x)$. Démontrons qu'elle est égale à sa série de Taylor.

On calcule sa série de Taylor centrée en $a = 0$ comme suit. On commence avec les dérivées :

	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$
$f(x)$	$\sin(x)$	0	0
$f'(x)$	$\cos(x)$	1	x
$f''(x)$	$-\sin(x)$	0	0
$f'''(x)$	$-\cos(x)$	-1	$-\frac{1}{3!}x^3$
$f^{(4)}(x)$	$\sin(x)$	0	0

Donc la série de Taylor de $\sin(x)$ centrée en 0 est

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Est-ce que c'est égale à $\sin(x)$?

Puisque $|f^{(n+1)}(c)| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $c \in \mathbb{R}$, il suit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons (pour un certain c dépendant de x, du théorème de Taylor) que

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0.$$

Donc par le théorème 4.47,

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

et que le rayon de convergence de la série est ∞.

Exemple 4.50. Il existe des fonctions qui admettent une série de Taylor qui converge partout, mais telle que $f(x)$ n'est jamais égale à la série (sauf en a, évidement). Voir les exercices. C'est pour cette raison qu'il ne suffit pas de vérifier que la série converge, afin de conclure qu'elle sera égale à $f(x)$.

Exemple 4.51. Démontrer que $\cos(x)$ est égale à sa série de Taylor.

Nous avons deux choix : (a) faire le même travail qu'on vient de faire pour $\sin(x)$, ou (b) utiliser la proposition, en exploitant le fait que puisque $\cos(x) = \frac{d}{dx}\sin(x)$, alors $\cos(x)$ est exprimable comme une série de puissances (qu'on peut calculer) et donc cette série est sa série de Taylor.

Tentons ce deuxième choix. Puisque $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$, par Prop 4.46 on a

$$\cos(x) = \frac{d}{dx}\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}(2n+1)x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

et le rayon de convergence est toujours ∞. Donc la fonction $\cos(x)$ est une série de puissances, et donc cette série de puissances est égale, par Proposition 4.46, à sa série de Taylor.

Exemple 4.52. (Exemple d'une substitution) Trouver la série de Taylor de $f(x) = \frac{1}{1-2x}$.

Solution : Puisque $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$ pour tout $u \in (-1, 1)$, on a

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

pour tout x avec $|2x| < 1$, donc pour tout x avec $|x| < \frac{1}{2}$. Donc le rayon de convergence de cette série est $\frac{1}{2}$, et c'est la série de Taylor de f centrée en 0.

Exemple 4.53. Trouver la série de Taylor de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Solution : Puisque

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

et que ceci converge pour tout $-1 < -x^2 < 1$, qui donne $-1 < x < 1$, on conclut par Proposition 4.46 que c'est bel et bien sa série de Taylor, avec rayon de convergence $r = 1$.

On remarque que tandis que la fonction $\frac{1}{1-x}$ n'est pas définie sur un intervalle plus grand que $(-1, 1)$, la fonction $\frac{1}{1+x^2}$ n'a pas d'asymptotes verticales (réels). Quand même, son rayon de convergence n'est pas plus large.

Exemple 4.54. Trouver la série de Taylor de $f(x) = \arctan(x)$.

Solution : Puisque $\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$, en appuyant Proposition 4.46 on obtient

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

avec $c = 0$. Le rayon de convergence est 1.

Remarque 4.55. Dans ce cas, c'est possible de démontrer que la série converge aussi pour $x = 1$, qui donne

$$\pi/4 = \arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots .$$

C'est une façon de calculer π à n'importe quelle précision (mais n'est pas la méthode la plus rapide).

Exemple 4.56. Calculer la série de Taylor de $x \sin(x)$, centrée en 0.

Solution : On a le droit de multiplier une série par une valeur, comme x :

$$\begin{aligned} x \sin(x) &= x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)!} x^{2n} \end{aligned}$$

or, puisque $x \sin(x)$ est égale à une série de puissances sur $\mathbb{R}$, il suit que c'est sa série de Taylor par Proposition 4.46.

Remarque 4.57. On avait vérifié que le reste de Taylor de la fonction ln tendait vers 0 lorsque $n \to \infty$, sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. Par contre, notre estimation de $R_n(x)$ ne nous permettait pas de conclure que ce reste de Taylor converge vers 0 lorsque $n \to \infty$ sur tout l'intervalle $(-1, 1)$. (Mais on ne peut pas conclure que le reste de Taylor n'y converge pas, car notre argument n'était que le calcul d'une borne supérieure des valeurs possible pour $R_n(x)$.) Donc le Théorème 4.47 ne nous donne que ln est égale à sa série de Taylor sur $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. On peut faire mieux (exercice).

4.5.2 Exercices

(1) Utiliser le fait que $\frac{d}{dx} \ln(1 + x) = \frac{1}{1+x}$ afin de déterminer la série de Taylor de $\ln(1 + x)$ centrée en 0. Puis faites un changement de variable pour déterminer la série de Taylor de $\ln(u)$ centrée en 1. Quel est son rayon de convergence ?

(2) Déterminer la série de Taylor de $\cos(x)$ centrée en 0 de deux façons : avec la Proposition 4.46 en utilisant que $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$, et en calculant ses dérivées et le reste de Taylor.

(3) Soit f la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x^{-2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(a) Démontrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$. Conseil : il faut utiliser la définition de la dérivée, qui vous mènera à calculer

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^{-2}}}{x} = 0$$

qu'on peut démontrer à l'aide de la règle de l'Hospital.

(b) Démontrer aussi que pour tout $n \geq 2$, $f^{(n)}(0) = 0$. Conseil : il faut calculer la dérivée en tout x. Par exemple, vous avez que

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ 2x^{-3}e^{-x^{-2}} & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

alors c'est possible de calculer $f''(0)$ come en (a). (Cet exercice est beaucoup de travail.)

(c) Écrire la série de Taylor de f. Pourquoi est son rayon de convergence 0 ? (C-à-d, pourquoi est-ce que f n'est pas égale à sa série de Taylor sur un intervalle $(-r, r)$ avec $r > 0$?).

Donc c'est un exemple d'une fonction non-analytique, c-à-d, une qui n'est pas égale à sa série de Taylor (sauf en a).

(4) Utiliser une substitution afin de calculer la série de Taylor de $\frac{1}{1-4x}$. Quel est son rayon de convergence ? Vérifiez votre réponse à l'aide d'un test de convergence.

(5) Donner une série de puissances avec un rayon de convergence de 4.

(6) Les exercices en Stewart (Calcul intégral) vous donnent la chance de pratiquer les outils de ce chapitre, et de réaliser les applications des séries de Taylor. Tenter Stewart, 6.8 # 3, 7, 11, 15, 25, et Stewart, 6.9 # 2, 4, 11, 13, 18, 26, 27, 34 (Quand la série de Taylor est centrée en 0, on l'appelle parfois la série de MacLaurin.)

(7) Trouver la série de Taylor de chacune des fonctions suivantes, avec l'appui du Tabeau 1, Section 6.9 de Stewart, et les exemples du cours. Dans chaque cas, identifier le point a à laquelle la série est centrée, et son rayon de convergence.

(a) $\cos(-x^2)$

(b) $\dfrac{x^2}{2+x}$ (Indice : $2 + x = 2(1 + x/2)$)

(c) (bonus) Étant donné que i est un nombre complexe dont $i^2 = -1$, évaluer la série de Taylor de e^{ix} et vérifier qu'elle coincide avec celle de $\cos(x) + i\sin(x)$.

(8) En reconnaissant chaque série comme étant égale à la série de Taylor d'une fonction connue, évalué en une certaine valeur de x, trouver la somme de chacune des séries suivantes :

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} 3^{2n}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n)!}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{(2n+1)!}$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+2} 3^{2n-1}}{5^{3n+4}}$

(f) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!}$ notez l'index de sommation !

(g) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} 3^{2n}$

(9) Soit $f(x)$ la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 1 \\ ex & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(a) Démontrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) Démontrer que sa série de Taylor existe en 0 et que cette série de Taylor converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(c) Montrer que $f(x)$ n'est pas égale à sa série de Taylor en 0

(d) Expliquer comment c'est possible, en faisant référence au Théorème 4.47.

Chapitre 5

Les intégrales

On a touché aux intégrales dans les chapitres précédents : le théorème de calcul fondamental (qui relie les dérivées et les intégrales) est une application du théorème des accroissements finis ; et le test de l'intégrale est un outil puissant pour déterminer la convergence ou divergence de certaines séries. Remarquer que dans les deux cas, ainsi que dans ce chapitre, c'est la définition de l'intégrale définie (et pas de l'intégrale indéfinie, ou anti-dérivée) qui est la clef.

5.1 Applications de l'intégration

La matière de ce chapitre se trouve aussi dans le manuel de cours par Stewart.

5.1.1 Rappel sur la définition de l'intégrale

En MAT1720, on a vu l'intégrale (définie) d'une fonction : si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

représent l'aire nette de la région du plan bornée par $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ et $y = 0$.

Cet aire est défini comme étant la limite d'une suite de sommes de Riemann, comme suit.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}_+$, diviser l'intervalle $[a,b]$ en n sousintervalles de longueur

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Notons les extrémités de ces sousintervalles par $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Donc pour chaque $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, nous avons

$$x_i = a + i\Delta x.$$

Maintenant, pour chaque $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, il faut choisir un point d'échantillonnage $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. On prend le rectangle d'hauteur $f(x_i^*)$ sur cet intervalle ; son aire nette est $f(x_i^*)\Delta x$. La somme des aires de ces rectanges

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

s'appelle une *somme de Riemann*. En procédant ainsi, on obtient une suite de sommes de Riemann.

Il y a une infinité de suites possibles, correspondant à nos choix de points d'échantillonnage ; par exemple, on peut toujours choisir les extrémités de gauche ($x_i^* = x_{i-1}$) ou de droite ($x_i^* = x_i$), ou du milieu ($x_i^* = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$), ou même aléatoirement.

On dit que f est *intégrable* si peu importe votre manière de choisir les points d'échantillonnage, vos sommes de Riemann arrivent toujours à la même limite. Dans ce cas on peut définir

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$$

pour n'importe quelle de ces suites. Un théorème (qui semble assez évident et qu'on démontre en MAT2525) est que si f est continue, alors f est intégrable.

Remarque 5.1. Attention ! La suite de sommes de Riemann n'est pas une série ! Dans une série, vous calculer des sommes partielles d'une seule grande somme qui continue jusqu'à l'infini ; ayant calculé la somme partielle s_n, vous n'avez qu'à y ajouter a_{n+1} pour obtenir s_{n+1}. Mais ici, chaque somme de Riemann est une somme complète, qui représente une approximation à l'aire nette sous la courbe. Ayant calculé S_n ne vous donne aucun avantage dans le calcul de S_{n+1}. Et il n'y a aucune somme de Riemann de la forme $\sum^{\infty}$ — chaque somme de Riemann est une somme finie.

Finalement, en MAT1720 (avec l'aide du théorème des accroissements finis) on a vu qu'étant donnée une fonction F telle que $f(x) = F'(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarque 5.2. D'où une autre consèquence du théorème fondamental : puisque l'intégrale définie existe pour toute fonction continue f, alors toute fonction continue admet une anti-dérivée. Cette anti-dérivée n'aura souvent aucune formule facile, sauf

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

où maintenant on n'a aucun choix que des sommes de Riemann pour calculer les valeurs de la fonction F.

Alors, la question qu'on se pose, c'est : étant donné que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

est-ce qu'il y a d'autres interprétations de la côté droite ?

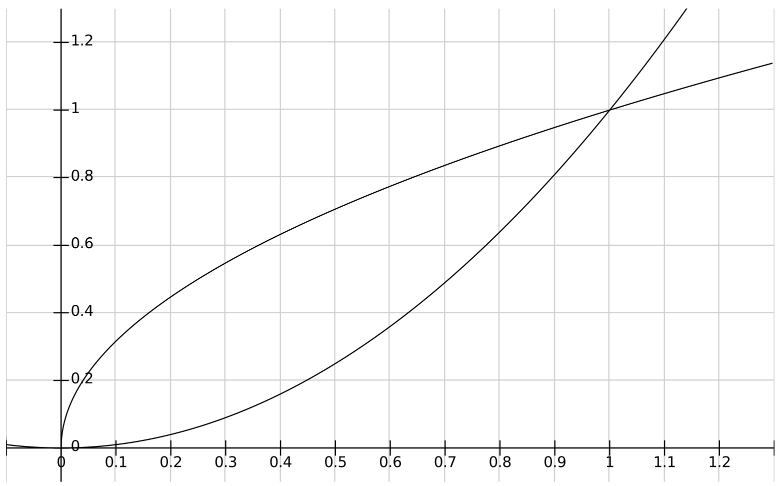
5.1.2 L'aire entre deux courbes

On généralise la méthode de la section précédente afin de calculer l'aire d'une région du plan découpée par des courbes.

Exemple 5.3. Disons qu'on voudrait calculer l'aire de la région entre les deux courbes

$$y = \sqrt{x} \quad \text{and} \quad y = x^2.$$

On esquisse le graphe et on voit que la région découpée est dans le premier quadrant.



[1]

Quelle est l'aire A de cette région ? D'un part, c'est évidement la différence des aires sous les deux courbes. Mais dérivons l'aire directement, afin de découvrir un principe intéressant.

Bien : que sont les bornes de l'intégration ? On ne les a pas spécifié, car ils sont intrinsèques : ce sont les points d'intersection des deux courbes. On fait le calcul, et ils sont $x = 0$ et $x = 1$.

Divisons l'intervalle $[0, 1]$ en n sousintervalles et dessinons des rectangles sur chaque sousintervalle tel que le bas du rectangle touche la courbe $y = x^2$ et qu'il s'étend jusqu'à la courbe $y = \sqrt{x}$.

Comment faire ceci algébriquement ? Bien, si on choisit un point d'échantillonnage x_i^* en $[x_{i-1}, x_i]$ alors on pourrait choisir $\sqrt{x_i^*}$ pour la frontière de haut et $(x_i^*)^2$ pour la frontière de bas du rectangle représentatif. Prenant la somme de l'aire de tous ces rectangles nous donne alors la formule

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{x_i^*} - (x_i^*)^2)\Delta x.$$

Mais puisque ceci est exactement une somme de Riemann de la fonction $\sqrt{x} - x^2$, on conclut que

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx.$$

1. Cet image a été crée par l'outil en-ligne FooPlot.

Donc

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \left[\frac{1}{3/2}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - (0) = \frac{1}{3}.$$

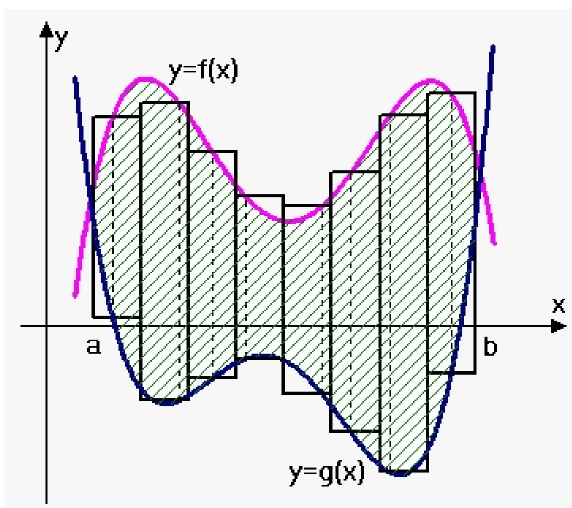
C'est une réponse très satisfaisant ! Remarquer que $\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$ et donc on vient de voir que nos deux courbes coupent le carré unitaire en trois régions de la même aire.

La leçon 1 : La région du plan délimitée par

$$\begin{aligned} x &= a & &\text{à la gauche} \\ x &= b & &\text{à la droite} \\ y &= f(x) & &\text{dans le haut} \\ y &= g(x) & &\text{dans le bas} \end{aligned}$$

a une aire de

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$



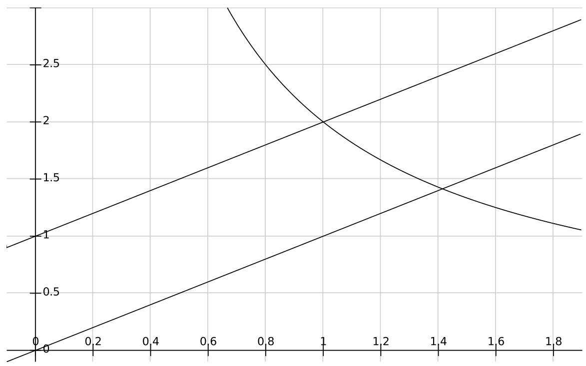
[2]

Remarque 5.4. Attention ! Il faut toujours esquisser le graphe pour ce type de problème, afin de reconnaître les bornes !

Exemple 5.5. Quelle est l'aire A de la région délimitée par $y = 2/x$, $y = x$ et $y = x + 1$ dans le premier quadrant ?

On esquisse le graphe et on voit que c'est une région inclinée. On calcul les trois “coins” de la région : $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $(1, 2)$.

2. Cet image vient du site web emathhelp.net.



[3]

Ce n'est pas de la forme de la leçon 1 ; mais pas de souci — on peut diviser la région en deux judicieusement.

Quand $0 \leq x \leq 1$, la courbe de haut est $y = x + 1$ et la courbe de bas est $y = x$.

Quand $1 \leq x \leq \sqrt{2}$, la courbe de haut est $y = 2/x$ et la courbe de bas est $y = x$.

Donc A sera la somme des aires de ces deux régions, qui peuvent se calculer par des intégrales :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 ((x+1) - x)dx + \int_1^{\sqrt{2}} (\frac{2}{x} - x)dx \\ &= \int_0^1 1dx + \left[2\ln(x) - \frac{1}{2}x^2\right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= 1 + (2\ln(\sqrt{2}) - \frac{1}{2}(2)) - (2\ln(1) - \frac{1}{2}) \\ &= 1 + \ln(2) - 1 - 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \ln(2). \end{aligned}$$

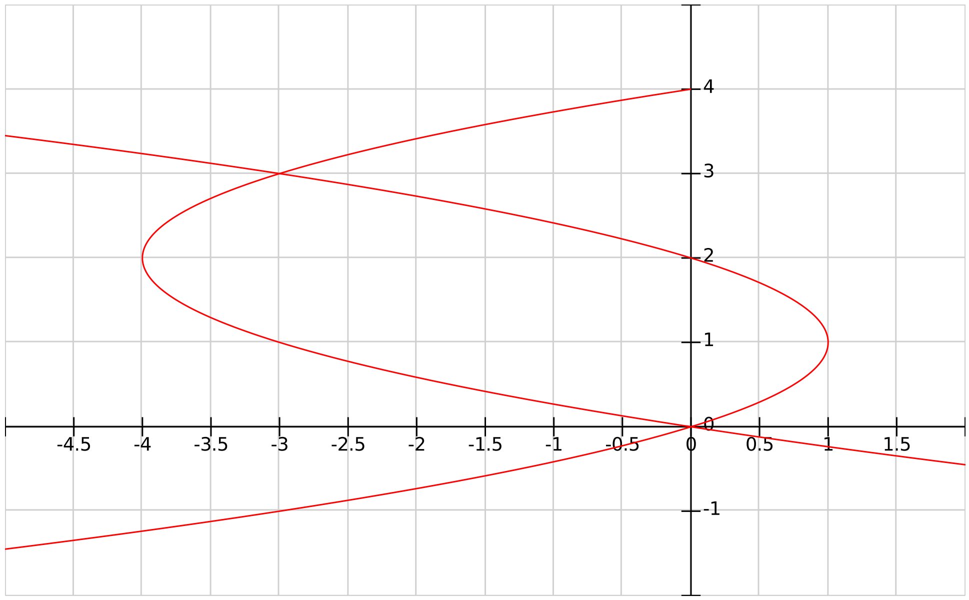
La leçon 2 : La frontière de haut ou de bas de votre région pourrait bien être une fonction définie en parties. Dans ce cas, diviser votre intégrale selon les parties, afin d'avoir sur chaque sousintervalle des expressions simples pour les frontières.

Mais là où qu'on commence à voir la puissance de cette formulation en termes de sommes de Riemann est l'exemple suivant.

Exemple 5.6. Trouver l'aire A de la région du plan délimitée par $x = y^2 - 4y$ et $x = 2y - y^2$.

On esquisse le graphe de ces deux courbes. Veuillez noter que $x = y(y-4)$ est une parabole qui ouvre vers la droite avec des interceptes $(0,0)$ et $(0,4)$; tandis que $x = y(2-y)$ est une parabole qui ouvre vers la gauche avec des interceptes en $(0,0)$ et $(0,2)$. Alors ils bornent une région bizarre. Leurs points d'intersection sont $(0,0)$ et $(-3,3)$. (Et sans avoir esquissé le graphe, on aurait peut-être cru que ces points d'intersections seraient nos bornes d'intégration !)

3. Image created by the online graphing utility FooPlot.



[4]

Oh, quel travail pénible ! Il faudra couper l'intervalle en trois morceaux et puis déterminer les formules $y = f(x)$ et $y = g(x)$ pour les frontières de haut et de bas sur chaque intervalle. (Voir les exercices.)

Mais pendant qu'on temporise, on remarque que si on tourne la page par $\pi/2$, le problème devient une qui est beaucoup plus facile à resoudre. Est-ce qu'on peut exploiter cette autre façon de voir le problème ? Bien oui !

Retournous à notre concept du départ : on divise l'intervalle $[0, 3]$ de l'axe des y en n sousintervalles, chacun de longueur $\Delta y (= 3/n)$. Sur chaque sousintervalle, on dessine un rectangle horizontal tel que la frontière gauche touche la courbe $g(y) = y^2 - 4y$ et que la frontière droite touche la courbe $f(y) = 2y - y^2$. Algébriquement, ça veut dire qu'on choisisse un point d'échantillonnage y_i^* dans le sous-intervalle, et que les frontières du rectangles seront $g(y_i^*)$ et $f(y_i^*)$ respectivement. Ainsi, on obtient une approximation à l'aire A de la région, qui est la somme des ces aires :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (f(y_i^*) - g(y_i^*))\Delta y.$$

La lettre utilisée est y au lieu de x, mais ça ne fait rien — c'est une somme de Riemann, et donc, quand on prend la limite lorsque $n \to \infty$, on obtient bel et bien $\int_0^3 (f(y) - g(y))dy$. Donc

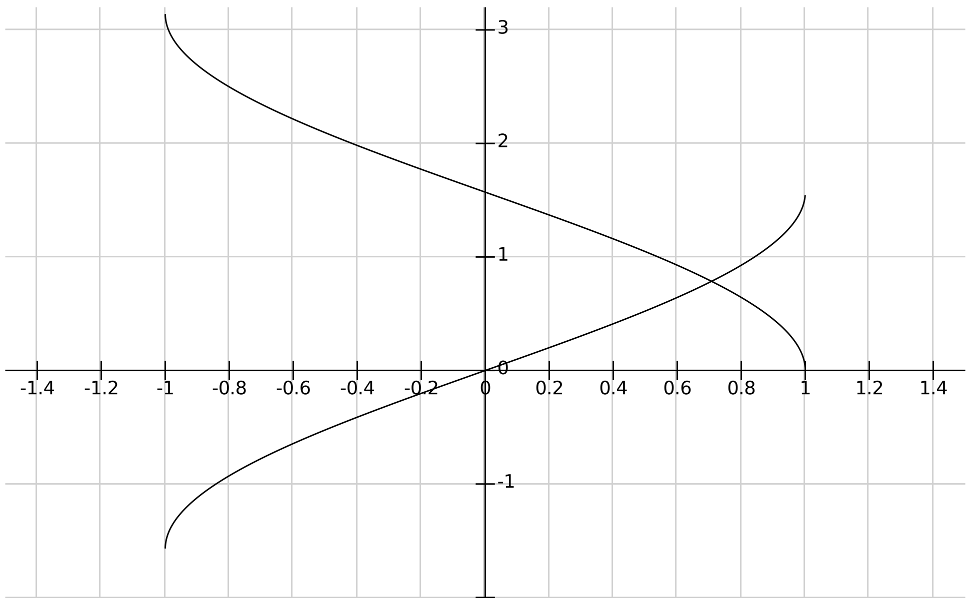
$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 (2y - y^2) - (y^2 - 4y)dy \\ &= \int_0^3 (-2y^2 + 6y)dy \\ &= \left[-\frac{2}{3}y^3 + 3y^2 \right]_0^3 \\ &= -\frac{2}{3}(27) + 27 - 0 = \frac{1}{3}(27) = 9. \end{aligned}$$

4. Image created by the online graphing utility FooPlot.

La leçon 3 : Vous pouvez intégrer par rapport à y si c'est plus convenable. **Ne changer pas le nom de vos variables ! N'échanger pas x avec y !** Habituez-vous à l'idée qu'on peut parfois intégrer par rapport à y une habitude qui vous aidera beaucoup quand vous faites les intégrales à plusieurs variables en MAT2522.

Exemple 5.7. Quelle est l'aire A de la région délimitée par les courbes $y = \arcsin(x)$, $y = \arccos(x)$ et $x = 0$?

Évidement il faut commencer en esquissant les graphes de ces fonctions.



[5]

Rappel[6] que $y = \arcsin(x)$, étant la fonction inverse de sinus, à un domaine de $[-1, 1]$ et son image est $[-\pi/2, \pi/2]$; c'est une fonction croissante et sa droite tangente à chaque extrémité est verticale. La fonction $y = \arccos(x)$ est également définie sur le domaine $[-1, 1]$ mais son image est $[0, \pi]$ et elle est *decroissante*.

Donc on se retrouve avec une région un peu triangulaire, qui est la région délimitée par ces trois courbes ($x = 0$ étant la troisième).

Afin de calculer A, on détermine que la borne d'intégration à droite sera le point d'intersection des deux courbes. Le point x pour lequel $\arcsin(x) = \arccos(x)$ est $x = \sqrt{2}/2$.[7]

Bon ! Alors

$$A = \int_0^{\sqrt{2}/2} (\arccos(x) - \arcsin(x)) \, dx$$

Oh. Quelle intégrale fâcheuse ! Il faut le faire avec intégration par parties (exercice).

5. Cet image a été crée par l'outil en-ligne FooPlot.

6. Voir la section dans le manuel de Stewart sur les fonctions trigonométriques inverses.

7. Pour voir ceci : on cherche y et x tels que $y = \arcsin(x)$ et $y = \arccos(x)$, or $\sin(y) = x$ et $\cos(y) = x$. Le point d'intersection de $\sin(y) = \cos(y)$ est $y = \pi/4$, or $x = \sqrt{2}/2$.

Mais avant de faire tout ce travail, on va voir ce que ça donne si on fait l'intégration en y au lieu d'en x. Puisque $y = \arcsin(x)$ veut dire $x = \sin(y)$ et $y = \arccos(x)$ veut dire $x = \cos(y)$, les courbes ont des expressions faciles. Le point d'intersection est en $y = \pi/4$; et l'intersection avec l'axe des y se fait en $y = 0$ et $r = \pi/2$. Donc en divisant l'intégrale selon les deux types de rectangles, on obtient

$$A = \int_0^{\pi/4} \sin(y)\ dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(y)\ dy$$

$$= [-\cos(y)]_0^{\pi/4} + [\sin(y)]_{\pi/4}^{\pi/2}$$
$$= (-\sqrt{2}/2 - (-1)) + (1 - \sqrt{2}/2) = 2 - \sqrt{2}$$

qui était beaucoup plus facile à calculer !

5.1.3 Exercises

1. Vérifier que si on veut intègrer par rapport à x à l'exemple 5.6 on obtiendra
$$\int_{-4}^{-3} 2\sqrt{4+x}\ dx + \int_{-3}^{0} (\sqrt{1-x} + \sqrt{4+x} - 1)\ dx + \int_0^1 2\sqrt{1-x}\ dx.$$
Calculer la réponse et comparer avec celle obtenue en Exemple 5.6.
2. Calculer l'intégrale en x de l'exemple 5.7, avec l'intégration par parties, et comparer votre réponse avec celle obtenue avec l'intégrale en y.

Il faudra tenter une variété d'exercices ; voir le manuel par Stewart.

5.2 Autres applications de l'intégrale

5.2.1 La valeur moyenne d'une fonction

Rappel : la moyenne d'un ensemble fini de nombres $\{a_1, \cdots, a_n\}$ est

$$a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Comment peut-on définir la valeur moyenne d'une infinité de nombres ? Évidement, cette formule ne se généralise pas ; mais en même temps, on sait bien qu'on pourrait parler de la profondeur "moyenne" d'un lac au cours d'un an. Pensons à comment qu'on calculerait une approximation de ceci.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On veut sa valeur moyenne. Donc on pourrait diviser $[a, b]$ en n sousintervalles de longueur $\Delta x = (b-a)/n$, et choisir un point d'échantillonnage x_i^* de chaque sousintervalle $[x_{i-1}, x_i]$. (Si $f(x)$ est la profondeur du lac en temps x, Δx pourrait être une semaine, et x_i^* un moment de la semaine.) Alors la moyenne de f sur $[a, b]$ sera approximée par la moyenne de sa valeur à ces points échantillonnage :

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*).$$

Est-ce que c'est une somme de Riemann ? Pas encore ; il nous manque le terme Δx. Mais bien :

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{b-a}\Delta x$$

or

$$M_n = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Parfait ! Donc, en prenant la limite lorsque $n \to \infty$, on obtient la formule pour la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a, b]$:

$$M(f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Une autre interprétation : puisque ceci dit

$$(b-a) \cdot M(f) = \int_a^b f(x)\, dx,$$

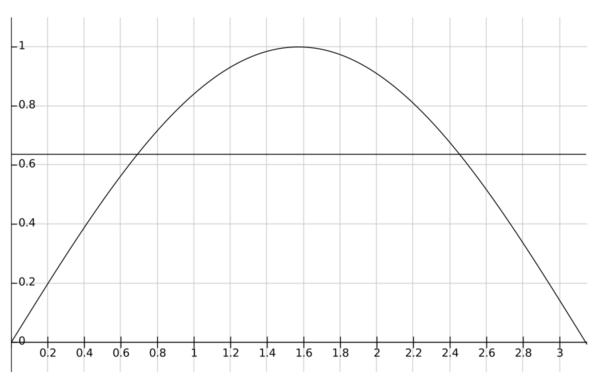
la valeur moyenne d'une fonction est la hauteur du rectangle sur $[a, b]$ qui a la même aire que l'aire sous la courbe $y = f(x)$.

Exemple 5.8. Trouver la valeur moyenne de la fonction $f(x) = \sin(x)$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Solution : $\int_0^\pi \sin(x)\, dx = -\cos(x)\Big]_0^\pi = -(-1-1) = 2$ donc la valeur moyenne est

$$\frac{1}{\pi - 0}\int_0^\pi \sin(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \sim 0.64.$$

Veuillez noter que ce n'est pas la moyenne de l'image $[0, 1]$ de la fonction, car la fonction passe plus de temps proche à 1 que proche à 0. C'est évident quand on esquisse le graphe : l'aire du rectangle donné est certainement une bonne approximation à l'aire sous la courbe.



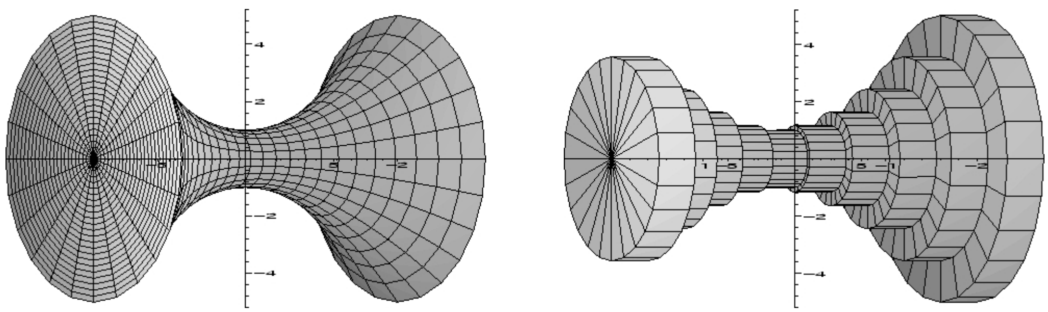
[8]

8. Cet image a été crée par l'outil en-ligne FooPlot.

5.2.2 Le volume d'un objet tridimensionnel par sections transversales

En MAT2522, vous allez voir comment l'intégrale en plusieurs variables représente le volume d'un objet. Mais si l'objet est assez simple, nous pouvons déterminer son volume en intégrant l'aire de chaque coupe transversale, le long de l'objet.

Donc, prenez votre objet, et choisir un axe. Imaginer couper votre solide en tranches, comme du pain, perpendiculaire à cet axe. Alors le volume V du solide sera la somme des volumes des tranches.


[9]

Le volume de chaque tranche, si elle est assez mince, sera bien approximée par le produit de son épaisseur (Δx) par l'aire de sa surface (disons, $A(x_i^*)$), qui donne la somme

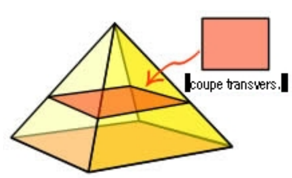
$$\sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x$$

qui est une somme de Riemann de la fonction $A(x)$. Donc, en prenant la limite lorsque $n \to \infty$, on déduit que

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

où $A(x)$ est une formule pour l'aire de la coupe transversale en x de votre objet.

Exemple 5.9. Soit une pyramide de hauteur 5, avec base un carré de grandeur 4×4.



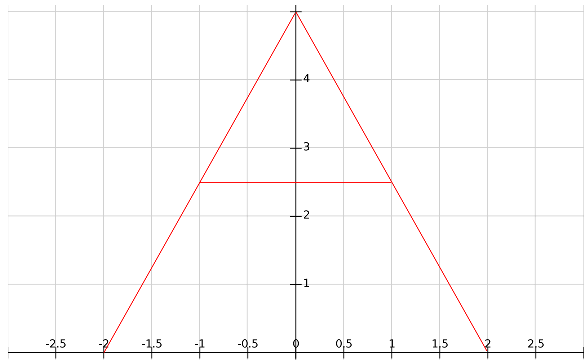
[10]

Plaçons la pyramide sur le plan xy, centrée sur l'axe des z, et avec côtés parallèles aux axes x et y. Coupons la pyramide en tranches perpendiculaire à l'axe des z ; donc chaque tranche aura un carré comme surface. Il faudra alors déterminer l'aire de ce carré, en fonction de la hauteur z, afin de trouver la fonction $A(z)$ qu'on va intégrer.

$\boxed{\text{Dessinons}}$ la coupe transversale dans le plan xz, afin de mieux comprendre les dimensions.

9. Cet image a été crée avec l'aide de logiciel Maple par Worcester Polytechnic Institute, pour leur cours MA1022, 2009, qui est disponible en-ligne.

10. Cet image est obtenu de mongarcia.wordpress.com.



[11]

On voit que z va de 0 à 5. Puisque les pentes sont données par $5x + 2z = 10$ et $-5x + 2z = 10$, pour chaque valeur z fixé (une coupe transversale), on aura

$$\frac{2}{5}z - 2 \leq x \leq 2 - \frac{2}{5}z,$$

or le segment est de longueur $4 - \frac{4}{5}z$. (Ou : utiliser des triangles similaires afin de trouver cette longueur.) Donc l'aire du carré à hauteur z sera

$$A(z) = (4 - \frac{4}{5}z)^2 = \frac{16}{25}(5 - z)^2$$

On vérifie rapidement notre calcul : quand $z = 0$, on obtient $A(0) = 16$; quand $z = 5$, on obtient $A(5) = 0$; parfait.

Donc le volume de la pyramide est

$$V = \int_0^5 \frac{16}{25}(5 - z)^2 \, dz = \frac{16}{25} \int_5^0 u^2 (-1) du$$

(avec la substitution $u = 5 - z$, $du = -dz$, $z = 0 \Rightarrow u = 5$, $z = 5 \Rightarrow u = 0$)

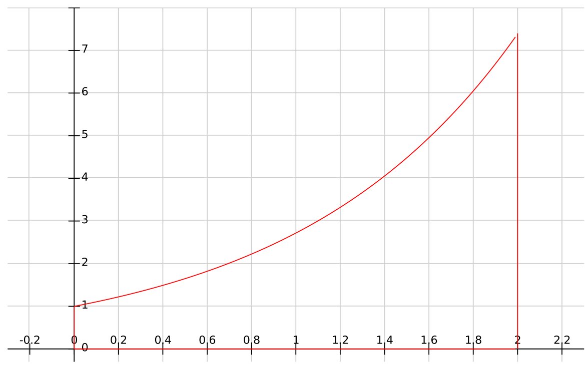
$$= \frac{16}{25}(-1)\frac{1}{3}u^3 \Big]_5^0 = \frac{16}{75}(0 - (-125)) = \frac{1}{3}(80)$$

qui coincide bel et bien avec la formule connue : $\frac{1}{3}b^2h = \frac{1}{3}(4)^2(5)$.$\square$

Mais on peut utiliser cette méthode pour calculer le volume d'objets beaucoup plus bizarres.

Prenons la région $\mathcal{R}$ dans le premier quadrant délimitée par $y = e^x$, pour $0 \leq x \leq 2$.

11. Cet image a été crée avec FooPlot.



[12]

On peut tourner cette région autour l'axe des x, ou autour l'axe des y, pour obtenir des solides différentes. Notons que leurs sections transversales seront soit des disques, soit des disques troués.

Exemple 5.10. Quel est le volume du solide résultant de la rotation autour de la droite des x de la région $\mathcal{R}$ délimitée par $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ et $y = e^x$?

On fait un dessin. Puisque l'axe de rotation est l'axe des x, nous allons intégrer l'aire $A(x)$ de chaque section tranversale de $x = 0$ à $x = 2$. Puisque à chaque x, la section transversale est un cercle de rayon e^x, cet aire est

$$A(x) = \pi(e^x)^2 = \pi e^{2x}$$

Donc le volume est

$$V = \int_0^2 A(x)\, dx = \int_0^2 \pi e^{2x}\, dx = \pi \frac{1}{2} e^{2x}\Big]_0^2 = \frac{\pi}{2}(e^4 - 1) \sim 84.2.$$

Donc : si chaque section transversale est un disque, son aire est $A(x) = \pi r(x)^2$ où r représente le rayon du disque qui apparaît comme section transversale au point x. Si on tourne autour l'axe des x, on a $r(x) = f(x)$; mais si on tourne autour de l'axe $x = t$, par exemple, on aura $r(x) = f(x) - t$.

Exemple 5.11. Quel est le volume du solide résultant de la rotation de la même région $\mathcal{R}$, mais cette fois autour de l'axe des y ?

On fait un dessin. Cette fois, plusieurs des tranches sont des disques troués. Pas de problème : rappel que si on a un disque troué, son aire est l'aire du grand disque moins l'aire du petit disque. Le rayon du petit disque est un point sur le graphe de $y = e^x$ et est la distance horizontale, c-à-d, la valeur $x = \ln(y)$. (Remarquons que c'est juste : il nous a fallu une expression en termes de y !) La courbe va de $(0, 1)$ à $2, e^2$; donc on obtient

$$A(y) = \begin{cases} \pi(2)^2 & \text{si } 0 \le y \le 1 \\ \pi(2)^2 - \pi(\ln(y))^2 & \text{si } 1 \le y \le e^2 \end{cases}$$

12. Cet image a été crée avec FooPlot.

alors

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{e^2} A(y)\ dy \\
&= \int_0^1 4\pi dy + \int_1^{e^2} (4\pi - \pi(\ln(y))^2)\ dy \\
&= \int_0^{e^2} 4\pi dy - \pi \int_1^{e^2} (\ln(y))^2 dy \\
&= 4\pi e^2 - \pi \left(y(\ln(y))^2 \Big|_1^{e^2} - 2\int_1^{e^2} \ln(y) dy \right) \\
&= 4\pi e^2 - 4e^2\pi + 2\pi \left(y\ln(y) \Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} dy \right) \\
&= 2\pi(2e^2 - (e^2 - 1)) \\
&= 2\pi(e^2 + 1)
\end{aligned}
$$

où nous avons appuyé l'intégration par parties deux fois afin de calculer l'intégrale.

> Donc : si chaque section transversale est un disque troué, son aire est $A(x) = \pi R(x)^2 = \pi r(x)^2$ où R représente le rayon extérieur et r le rayon intérieure (qui sont fonctions de la valeur x qui détermine les section transversales).

Par contre, c'était compliqué dans cet exemple puisqu'on a dû prendre la fonction inverse. Est-ce qu'il y a une autre approche possible ? Oui, bien sûr !

5.2.3 Le volume d'un object tridimensionnel : la méthode de coquilles cylindriques

Au lieu de couper notre solide en tranches perpendiculaires à l'axe de rotation, qu'arrive-t-il si on la coupe en coquilles cylindriques à rayon constante autour de l'axe de rotation ?

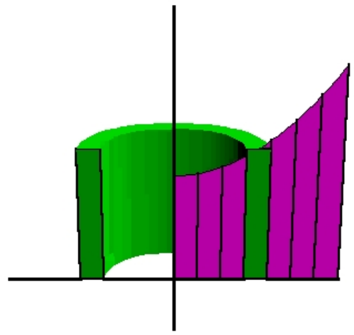
Le volume de cette coquille cylindrique, si elle est assez mince, sera bien approximé par le produit de l'aire de sa surface et épaisseur Δx. L'aire de la surface d'un cylindre étant $2\pi rh$, où r dénote son rayon et h sa hauteur, on obtient la formule

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i(x) h_i(x) \Delta x$$

qu'on reconnaît est une somme de Riemann pour une intégrale

$$V = \int_a^b 2\pi r(x) h(x)\ dx$$

Exemple 5.12. Prenons le même exemple : Quel est le volume du solide résultant de la rotation autour de la droite des y de la région $\mathcal{R}$ délimitée par $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ et $y = e^x$?



13

$\boxed{\text{On fait notre dessin.}}$ Puisque chaque coquille cylindrique coupe la région $\mathcal{R}$ dans un rectangle verticale, on voit que le rayon sera x et la hauteur sera $e^x - 0$, et les bornes d'intégration sont de $x = 0$ à $x = 2$. Donc

$$V = \int_0^2 2\pi x e^x \, dx = 2\pi \left[x e^x - e^x\right]_0^2 = 2\pi(2e^2 - e^2 - (-1)) = 2\pi(e^2 + 1)$$

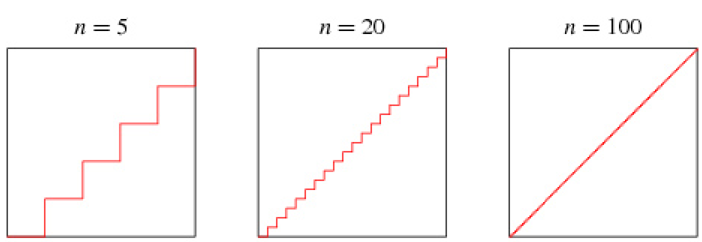
comme on l'avait déjà calculé.

Avec la méthode de coquilles cylindrique, notre variable d'intégration est l'axe perpendiculaire à l'axe de rotation, et ce qu'on intégre représente l'aire de surface de la coquille cylindrique à chaque distance de l'axe.

5.2.4 La longueur d'un arc de courbe

Jusqu'à date, on a utilisé les intégrales afin de calculer l'aire de régions dans le plan, et le volume d'un objet dans l'espace. Peut-on aussi trouver la longueur d'un arc de courbe ? Quelques petits exemples mettront en évidence qu'il faut hésiter.

Exemple 5.13. Le paradoxe de la diagonale :



14

"Évidement" les courbes s'approchent à la diagonale. Mais puisque chaque courbe est composée de segments horizontales et verticales, il suit que leur longueur est toujours 2, tandis que la longueur de la limite — la diagonale — est $\sqrt{2}$.

13. Cet image vient du site web mathdemos.org.

14. Weisstein, Eric W. "Diagonal Paradox." From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http ://mathworld.wolfram.com/DiagonalParadox.html

Oups ; bien, il faudra que notre approximation soit par des segments qui sont des sécantes de la courbe, c-à-d, qui sont des lignes droites d'un point de la courbe à un prochain point sur la courbe. Est-ce que ça suffit ?

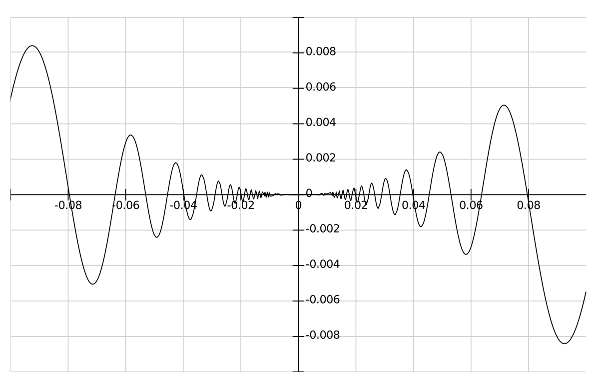
Exemple 5.14. Le paradoxe de la côte d'Angleterre :


[15]

On veut mesurer la côte d'Angleterre. Mais au lieu d'obtenir un meilleur résultat avec une résolution plus fine, c'est l'envers — le plus court notre segment, le plus long la côte. En effet, la longueur de la côte est sans borne !

Oups ; bien, c'est à faire avec la dérivée : il faudra que notre courbe soit dérivable pour que les sécantes peuvent bien approximer la courbe.

Exemple 5.15. La courbe $y = x^2 \sin(1/x)$ (avec valeur $y = 0$ en $x = 0$). C'est une fonction dérivable en tout x ; mais on a vu que sa dérivée n'est pas continue en 0 :



[16]

15. "Britain-fractal-coastline-100km". Licensed under CC BY-SA 3.0 via Wikimedia Commons - http ://commons.wikimedia.org/wiki/File :Britain-fractal-coastline-100km.png#/media/File :Britain-fractal-coastline-100km.png ; "Britain-fractal-coastline-50km". Licensed under CC BY-SA 3.0 via Wikimedia Commons - http ://commons.wikimedia.org/wiki/File :Britain-fractal-coastline-50km.png#/media/File :Britain-fractal-coastline-50km.png

16. Cet image a été crée par le logiciel en-ligne FooPlot.

Mais c'est possible de démontrer que sa longueur d'arc entre 0 et 1 est infini.

En fin de compte : on peut toujours trouver la longueur d'un arc de courbe si la courbe est *lisse* : ayant une dérivée qui est continue en chaque point. Sous cette condition, c'est vrai que nos approximations par les segmets sécantes convergera vers la longueur de l'arc.

Quelle est une formule pour la longueur d'un arc de la courbe $y = f(x)$ entre $x = a$ et $x = b$? Chaque segmet est l'hypoténuse du triangle de base Δx et hauteur $\Delta y = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Par le théorème des accroissements finis, il existe un point x_i^* dans ce sousintervalle pour quel

$$f'(x_i^*) = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} L_i &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x)^2 \left(1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right)} \\ &= \sqrt{1 + f'(x_i^*)^2}\Delta x \end{aligned}$$

qui implique que notre approximation pour la longueur de cet arc est

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(x_i^*)^2}\Delta x$$

qui est une somme de Riemann. Donc lorsque $n \to \infty$ celui-ci converge vers

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

C'est notre formule pour la longueur de cet arc de courbe.

Remarque 5.16. En générale, ce sont des formules assez compliqué ; si vous choisissez une fonction par hazard, c'est bien possible qu'il n'existera aucune "belle" fonction qui sera l'anti-dérivée de $\sqrt{1 + f'(x)^2}$.

Exemple 5.17. Trouver la circonférence d'un cercle de rayon r.

Il suffit de calculer la longueur d'une portion de ce cercle dans le premier quadrant.

On considère la courbe $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ entre $x = 0$ et $x = r/\sqrt{2}$. Cette fonction est dérivable en tout point, y compris les extrémités de l'intervalle, et cet arc représente $1/8$ du cercle. On calcule

$$f'(x) = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-1/2}(-2x) = -x(r^2 - x^2)^{-1/2}$$

or

$$1 + f'(x)^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2} = \frac{1}{1 - (x/r)^2}.$$

Alors

$$L = \int_0^{r/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - (x/r)^2}} dx$$

qu'on peut résoudre à l'aide de la substitution trigonométrique $x/r = \sin(\theta)$; donc $\frac{1}{r}dx = \cos(\theta)d\theta$ et si $x = 0$ on a $\theta = 0$ mais quand $x = r/\sqrt{2}$, on a $\theta = \pi/4$. Donc

$$L = \int_0^{\pi/4} \frac{r\cos(\theta)}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} d\theta = r\int_0^{\pi/4} \frac{\cos\theta}{\cos\theta} d\theta = r\pi/4.$$

C'est parfait.

5.2.5 Exercices

Veuillez reviser les exemples dans le manuel de cours, et puis tenter les exercices. L'idée n'est pas de memoriser une formule ou une autre, mais de comprendre comment qu'on peut aborder un problème avec les outils de l'intégration. En fait, ce qu'on a découvert, c'est que notre façon d'obtenir des approximations nous mènent souvent à des sommes de Riemann — et aussitôt qu'on reconnait qu'on ne veut que la limite d'une suite de sommes de Riemann, lorsque $n \to \infty$, il suffit de calculer un intégrale.

Chapitre 6

Les courbes et les surfaces

Nous visons faire les premiers pas vers le calcul différentiel de fonctions réelles de plusieurs variables. Notre but dans ce chapitre est détablir un lexique de courbes et surfaces standards avec quelles on se familiarise, afin d'avoir des bons exemples typiques à quels on peut se référer avec confiance. Notre source d'exemples sont des section coniques et les quadriques (aussi dit, les surface quadratiques), qui sont des courbes et surfaces très intéressantes. Elles ne sont en générale pas les graphes d'une fonction, par contre !

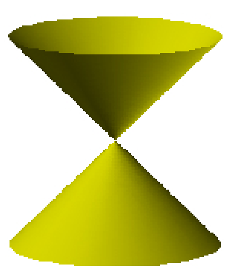
6.1 Courbes en $\mathbb{R}^2$: les sections coniques

Les courbes les plus simples en $\mathbb{R}^2$ sont les droites. Chacune se représente comme l'ensemble de solutions (x, y) à une équation linéaire :

$$ax + by = c$$

pour certaines constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si $b \neq 0$, cette courbe est le graphe de la fonction $y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$. En termes géométriques, par contre, il n'y a aucune raison de faire une telle distinction, alors on n'a pas de telle préférence dans ce chapitre.

Si on prend une droite et la fait tourner autour d'un axe qui intersecte la droite en un point, la surface de révolution résultante est soit un plan (si la droite et l'axe étaient perpendiculaires), soit un *double cône*.



[1]

1. Picture of a double cone, from mathwords.com : Mathwords : Terms and Formulas from Algebra I to Calculus

Quelles seront les prochaines courbes à considérer ? Peut-être les courbes qui représentent l'ensemble de solutions (x, y) à une équation quadratique :

$$ax^2 + by^2 = c \tag{6.1}$$

pour des constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$; ou plus généralement,

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f \tag{6.2}$$

pour des constantes $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, avec au moins un de a, b ou c nonnulle.

Ce qui est merveilleuse est le fait (qu'on va explorer dans cette section) que chacune de ces courbes peut-être représenté comme une section conique, c'est à dire, une section transversale du double cône, comme à la Figure 6.1.

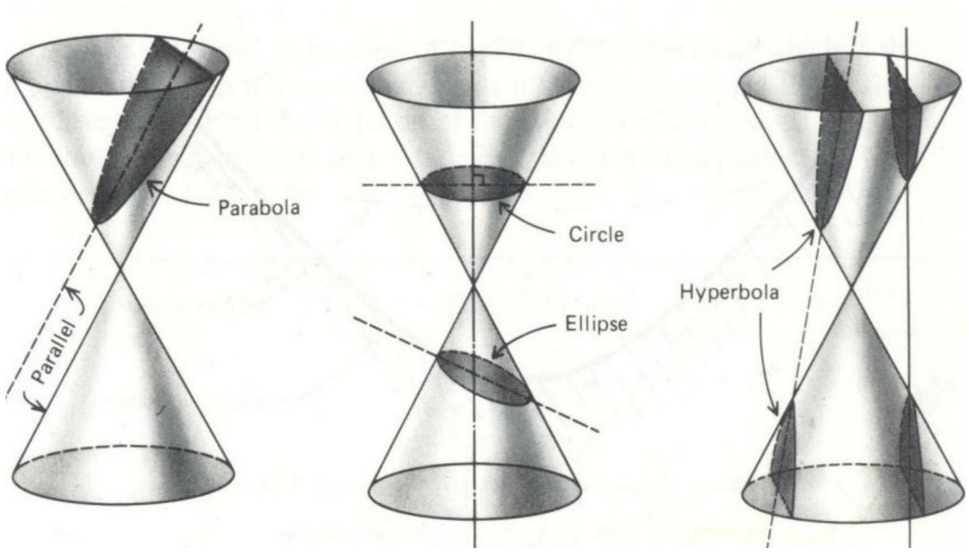


FIGURE 6.1 – Cette figure des sections coniques vient du site web (qui offre aussi beaucoup d'information concernant les section coniques !) : `http://www.andrews.edu/~calkins/math/webtexts/numb19.htm`. Copyright Keith G. Calkins.

Les sections coniques fut étudiées par le Grand Géomètre Apollonius de Perga (262-190 av J-C), qui les traita dans sont volume influentiel *Les coniques*. Son traitement était complétement géométrique — on n'avait inventé les coordonnées cartésiennes qu'à 1800 ans plus tard ! — alors dans ce qui suit on combinera une approche analytique avec l'approche géométrique.

6.1.1 Exemple 1 : La parabole

Un cas particulier de (6.2) est

$$ax^2 + ey = f$$

qui donne :

written, illustrated, and webmastered by Bruce Simmons

- une parabole, si a et e sont nonnulles,
- une droite, si $a = 0$ et $e \neq 0$, ou $e = f = 0$ et $a \neq 0$,
- deux droites, si $e = 0$ et $f/a > 0$.

(Donc on peut dire que ces droites sont des formes dégénérées.)

On pourrait également considérer les paraboles

$$x = ay^2$$

où, en déplaçant l'origine à (s, t), la famille de paraboles

$$y - t = (x - s)^2.$$

On peut faire n'importe quelle changement le variables linéaire, qui correspond à une dilatation, rotation, ou reflection de la parabole ; le résultat est toujours dite une parabole.

Géométiquement, une parabole se décrit *par foyer et directrice* comme suit.

Lemme 6.1. *Soit D une droite (appellée la directrice) et P un point (le foyer) qui n'est pas sur D. L'ensemble de points Q qui ont la même distance de P et de D décrit une parabole.*

Démonstration. On peut sans perte de généralité choisir D la droite $y = -1$ et P le point $(0, 1)$ (après des dilatations, rotations et translations, si nécessaire). Alors un point (x, y) a une distance de $y + 1$ de D et une distance $\sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2}$ de P. Or

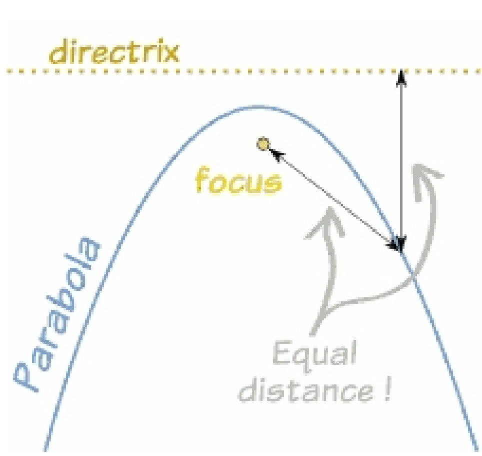
$$(y + 1)^2 = x^2 + (y - 1)^2$$

qui donne

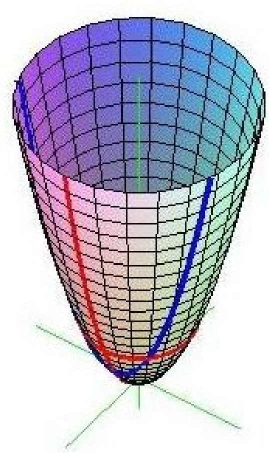
$$4y = x^2 \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{4}x^2$$

qui est bel et bien une parabole. $\square$

Sa surface de révolution autour de l'axe perpendiculaire à la directrice, et passant par le foyer, est un *paraboloïde*.



[2]


[3]

2. Cette image de la définition géométrique d'une parabole vient du site web mathisfun.org.
3. Cette image d'un paraboloïde vient de : The Worlds of David Darling, Encyclopedia of Sciences, www.daviddarling.info

Une conséquence de cette définition géométrique est que tout rayon de lumière perpendiculaire à la directrice qui reflète sur l'intérieure de la courbe passera ensuite par le foyer. Par exemple, les phares d'un automobile ont la forme d'un paraboloïde, car les rayons de la lumiére de l'ampoule reflèteront sur les surfaces paraboliques afin de faire sortir de la /phare des bandes parallèles de lumière .

6.1.2 Exemple 2 : L'ellipse

Prenons ensuite l'équation simple (6.1)

$$ax^2 + by^2 = c$$

telle que $a > 0$ et $b > 0$. (Si $a < 0$ et $b < 0$, multiplie l'équation par -1.)

Si $c < 0$, cette équation n'a aucune solution ; si $c = 0$ elle n'a que l'origine comme solution. Autrement, elle admet quatre interceptes :

$$(\pm\sqrt{c/a}, 0), (0, \pm\sqrt{c/b}). \tag{6.3}$$

Mais de quoi a-t-elle aire ?

L'idée : relier cette courbe à quelque chose qu'on connait bien. Soit $u = \sqrt{a}x$ et $v = \sqrt{b}y$. Alors

$$u^2 + v^2 = c$$

est un cercle de rayon $\sqrt{c}$; facile. Pour retourner à nos coordonnées de départ, il faut dilater l'axe des u par $\frac{1}{\sqrt{a}}$ et l'axe des v par $\frac{1}{\sqrt{b}}$ — donc faire une *ellipse*. Dites plus simplement, ce qu'on fait c'est étirer ou serrer le cercle afin de déplacer ces interceptes aux points trouvés en (6.3).

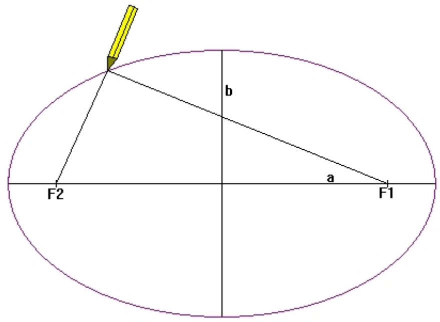
Donc, si $a < b$, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ et alors c'est un ellipse allongée le long de l'axe des x ; et si $a > b$, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ et c'est une ellipse allongée le long de l'axe des y.

Lemme 6.2. *Soient P et Q deux points (foyers) dans le plan (peut-être les mêmes). Soit $r > 0$ une distance fixe. Alors l'ensemble de points R tels que*

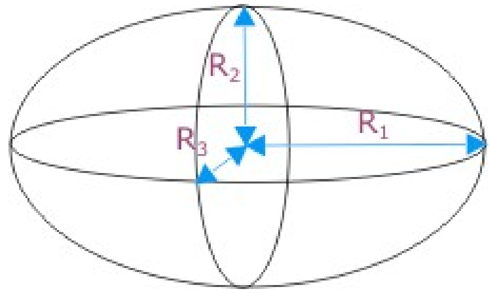
$$d(R, P) + d(R, Q) = r$$

c-à-d, la somme de la distance de R en P et la distance de R en Q est r, décrit une ellipse.

On vous laisse la démonstration comme exercice. La surface de révolution obtenue en tournant une ellipse autour d'une axe de symétrie est appellé un *ellipsoïde*.



[4]



[5]

Une conséquence de cette définition géométrique est que si la source d'une lumière ou un rayonnement se trouve à un foyer de l'ellipsoïde, alors ses rayons reflèteront sur la surface intérieure afin de se concentrer sur l'autre foyer. C'est utilisée de cette façon dans la lithotripsie, un traitement médicale non-invasif pour la destruction de calculs rénaux.

6.1.3 Exemple 3 : une hyperbole

Prenons ensuite l'équation simple (6.1)

$$ax^2 - by^2 = c \tag{6.4}$$

avec $a, b > 0$.

Si $c = 0$, on obtient deux droites $y = \pm\sqrt{a/b}$ passant par l'origine ; c'est le ca dégénéré.

Si $c > 0$, alors les interceptes sont $(\pm\sqrt{c/a}, 0)$, sur l'axe des x, et il n'existe aucune solution si $x = 0$. On peut donc récrire l'équation de la forme

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{a}{b} - \frac{c}{bx^2} < \frac{a}{b} \tag{6.5}$$

or tout (x, y) de la courbe satisfait

$$-\frac{a}{b} < \frac{y}{x} < \frac{a}{b}.$$

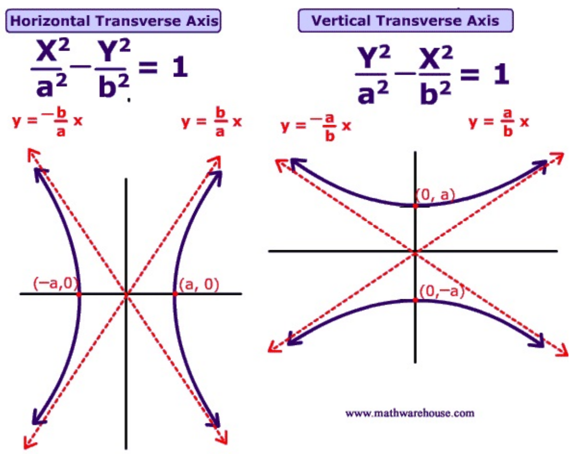
En plus, on voit de (6.5) que lorsque $x \to \infty$, la courbe admet des asymptotes de $y = \pm\sqrt{a/b}x$.

Si $c < 0$, alors (6.4) peut être récrit

$$-ax^2 + by^2 = -c$$

avec terme constante $-c > 0$. Il suit qu'il faudra tout simplement intervertir x et y dans le paragraphe précédent.

4. La construction d'une ellipse : du site web Constructing Ellipses : by Steven Dutch, Natural and Applied Sciences, University of Wisconsin - Green Bay, www.uwgb.edu/dutchs/MATHALGO/Ellipses.HTM
5. Cet image d'un ellipsoïde vient du site web http ://www.calculatoredge.com/enggcalc/volume.html



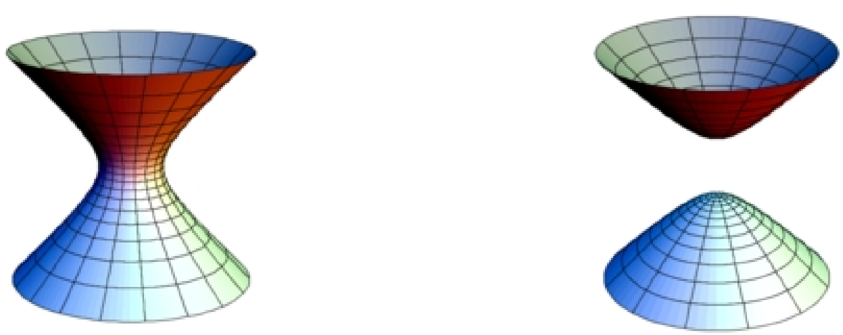
[6]

Lemme 6.3. *Soient P et Q deux points (foyers) dans le plan. Soit $r > 0$ une distance fixe. Alors l'ensemble de points R tels que*

$$|d(R, P) - d(R, Q)| = r,$$

c-à-d, la valeur absolue de la différence des distance à P et à Q est r, décrit une hyperbole.

La démonstration est un exercice (pénible). La surface de révolution obtenue en tournant une hyperbole autour d'une axe de symétrie est appellé un *hyperboloïde*. Si l'axe de rotation n'intersecte pas l'hyperbole, le resultat est un hyperboloïde à une nappe ; autrement, c'est un hyperboloïde à deux nappes.



[7]

Les structures hyperboloïdes incluent les tours aéroréfrigérantes d'une centrale nucléaire.

6.1.4 Sommaire

Les sections coniques sont les ensembles du plan définies par une équation quadratique nondégenérée. Après avoir faite une rotation ou une translation, si nécessaire (voir la section suivante), elles auront une des formes suivantes :

6. Images of hyperbolas from MathWarehouse.com

7. Ces images d'un hyperboloïde à une nappe et d'un hyperboloïde à deux nappes viennent de MathForum.org http ://mathforum.org/mathimages/index.php/Hyperboloid

1. une elllipse : $ax^2 + by^2 = c$ avec $a, b, c > 0$
2. une hyperbole : $ax^2 - by^2 = c$ ou $-ax^2 + by^2 = c$ avec $a, b, c > 0$
3. une parabole : $y = ax^2$ ou $x = ay^2$ avec $a \neq 0$.

6.1.5 La courbe quadratique générale (optionnel)

On pourrait se poser la question : est-ce qu'il existe d'autres courbes quadratiques

$$C = \{(x, y) \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f\}$$

que la parabole, l'ellipse, l'hyperbole et leur formes dégénérées ? Finalement, non.

La première observation est que si a et c sont nonulles, alors

$$ax^2 + cy^2 + dx + ey = a(x + \frac{d}{2a})^2 + c(y + \frac{e}{2c})^2 - f'$$

avec $f' = \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c}$. Donc la courbe est une ellipse ou une hyperbole centrée en $(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2c})$. Un raisonnement similiaire nous donne un résultat semblable si $ac = 0$. Mais quel est l'effet d'un terme mixte bxy ?

Proposition 6.4. *Soient $a, b, c, f \in \mathbb{R}$ des constantes. Soit $C = \{(x, y) \mid ax^2 + bxy + cy^2 = f\}$. Si $b \neq 0$, il existe une matrice de rotation*

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

telle que si on fait le changement de variable

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = R(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R(-\theta) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

alors il existe $a', c' \in \mathbb{R}$ tels que

$$C = \{(u, v) \mid a'u^2 + c'v^2 = f\},$$

qui n'a pas de terme mixte.

Démonstration. On a besoin du fait suivant de notre cours d'algèbre linéaire. Soit

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$$

une matrice de nombres réels symétrique. Son polynôme caractéristique est

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - \frac{1}{4}b^2)$$

dont les racines (qui sont sont les valeurs propres de A) sont

$$\{a', c'\} = \frac{a + c \pm \sqrt{(a + c)^2 - 4ac + b^2}}{2} = \frac{1}{2}(a + c \pm \sqrt{(a - c)^2 + b^2}).$$

Puisque $b \neq 0$ implique que $(a-c)^2 + b^2 \neq 0$, les valeurs propres de A sont distinctes.

C'est un exercice intéressante en algèbre linéaire de démontrer que les vecteurs propres d'une matrice symétrique ($A = A^T$) sont orthogonales (en utilisant le fait qu'en termes de multiplication de matrices, le produit scalaire de deux vecteurs colonnes $\vec{s}, \vec{t}$ est $\vec{s}^T \vec{t}$).

C'est un autre exercice intéressante en algèbre linéaire de démontrer que si $\vec{s}$ et $\vec{t}$ sont deux vecteurs orthogonales de norme 1, alors l'un ou l'autre des matrices suivantes est une matrice de rotation :

$$\begin{bmatrix} \vec{s} & \vec{t} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \vec{t} & \vec{s} \end{bmatrix}.$$

Supposons sans perte de généralité que c'est le premier ; notons-la $R(\theta)$. Disons $A\vec{s} = a'\vec{s}$ et $A\vec{t} = c'\vec{t}$.

Alors par la théorie de la diagonalisation de matrices, on a $A = R(-\theta)DR(\theta)$ où $D = \begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{bmatrix}$.

Définir les nouveaux variables (u, v) par l'équation $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = R(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} R(-\theta)DR(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ &= a'u^2 + c'v^2. \end{aligned}$$

$\square$

En autre mots : l'existence d'un terme mixte bxy dans l'équation correspond géométrique à une courbe dont les axes de symétrie ne sont pas carrés aux axes x et y. Mais géométriquement, on n'obtient aucune nouvelle courbe.

6.1.6 Exercices

1. Démontrer Lemme 6.2 et Lemme 6.3. Sans perte de généralité, vous pouvez supposer que $P = (-1, 0)$ et $Q = (1, 0)$. Soit $r > 0$. Pour l'ellipse, commencer en récrivant l'équation comme $d(R, P) = r - d(R, Q)$; pour l'hyperbole, diviser en deux cas : $d(R, P) = r + d(R, Q)$ et $d(R, P) = -r + d(R, Q)$. Dans chaque cas, prenez le carré des deux bords et simplifier soigneusement afin d'isoler l'expression racine carré restante ; prenez ensuite le carré des deux bords encore une fois.
2. Identifer les sections coniques suivantes. Tracer leur graphe dans le plan, indiquant tout intercepte et asympote, le cas échéant :
   (a) $3x^2 + 4y^2 = 4$
   (b) $3x^2 - 4y^2 = 3$
   (c) $-3x^2 + 4y^2 = 2$
   (d) $xy = 4$ (Indice : Vous connaissez cette courbe et il y a un théorème qui vous promet que c'est soit une ellipse, une parabole, une hyperbole, ou une forme dégénérée d'une d'eux.)

(e) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = -4$ (Indice : compléter les carrés)

(f) $x^2 - y^2 + 2x - 2y = 3$

3. Parfois, c'est utile de remplacer les coéfficients par des coéfficients de la forme $\pm\frac{1}{a^2}$. Le a^2 est donc un nombre réel positif ; et puisqu'on le met au dénominateur c'est clair que ce coéfficient est non-nulle. Donner l'équation d'une ellipse standard et des deux hyperboles standards, dans cette forme. Quels sont leurs interceptes avec les axes x et y ?

6.2 Les surfaces quadriques en $\mathbb{R}^3$

On a décrit quelques surfaces de révolution dans le chapitre précédent. Une façon de trouver leur équation est de remplacer x^2 par $x^2 + z^2$ (ou y^2 par $y^2 + z^2$), ce qui correpond à la rotation autour de l'axe des y (ou de x).

Plus généralement, on pourrait considérer une *surfaces quadriques*, qui est l'ensemble de solutions à une équation de la forme[8] soit (pour des constantes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$)

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = d$$

ou soit

$$z = ax^2 + by^2.$$

Notre approche pour comprendre ces surfaces deviendra la clef pour comprendre le graphe de n'importe quelle fonction $z = f(x, y)$: on calcule ses *traces* ou *courbes de niveau*, qui sont les sections transversales de la surface.

En dessinant les courbes à niveau pour des valeurs différentes de z, on déduit de l'information sur la forme de la surface. Souvent, on y rajoute l'étude des traces $x = 0$ ou $y = 0$, qui sont les intersections de la courbe avec le plan yz et le plan xz, respectivement.

Veuillez lire la section "Les cylindres et les surfaces quadriques" du manuel de Stewart. Vous y trouverez des excellents graphiques, vous indiquant comment vous pouvez déduire des caractéristiques d'une surface en examinant ses courbes à niveau. Il y inclut aussi un joli tableau "Les graphiques des surfaces quadriques."

Les exemples représentatifs qu'on a vu au cours :

- $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$: un ellipsoïde
- $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 0$: un double cône
- $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = -36$: un hyperboloïde à deux nappes
- $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 36$: un hyperboloïde à une nappe
- $z = x^2 + 4y^2$: un paraboloïde elliptique
- $z = x^2 - 4y^2$: un paraboloïde hyperbolique (une selle, un Pringle)

8. Par les méthodes de la Section **??**, c'est possible de démontrer que les solutions à ces formes représentent, géométriquement, toutes les surfaces qui sont obtenues comme solution à une équation quadratique en 3 variables (à part de quelques exemples additionnles dégénéres).

Ce n'est pas utile de mémoriser la formule d'une surface quadrique, car il y a une tonne de variations possibles (par exemple, $x^2 - 4y^2 - 9z^2 = 0$ décrit également un double cône). L'important, c'est de comprendre comment trouver les courbes de niveau de chaque surface et d'en reconnaître les propriétés clefs de la surface.

Les quadriques sont des examples de surfaces très intéressants ; on les étudie afin de commencer notre étude de fonctions à plusieurs variables avec des graphes familiers.

Chapitre 7

Les fonctions à deux (ou plusieurs) variables

7.1 Les fonctions à deux variables et leurs graphes

Veuillez lire la section "Les fonctions de plusieurs variables" dans le manuel par Stewart. Les définitions clefs sont :

1. le domaine d'une fonction de deux variables, qui est une région dans le plan xy
2. le graphe d'une fonction de deux variables, qui est une surface dans l'espaces xyz
3. les courbes de niveau, qui sont les intersections du graphe de f avec un plan $z = k$ fixe

Veuillez voir les illustrations et exemples ; c'est important de comprendre comment qu'on peut représenter et interpréter les courbes de niveau (espéciallement quand on dessine toute une famille de courbes de niveau sur le même plan xy) :

- si $f(x, y)$ représente l'élévation du terrain aux coordonnées (x, y), alors les courbes de niveau sont les courbes d'élévation constante au-dessus du niveau de la mer.
- si $f(x, y)$ représente la température aux coordonnées (x, y), alors les courbes de niveau sont les isothermes
- si $z = f(x, y)$ est la fonction Cobb-Douglas en économie (où : x représente la quantité de travail dans une économie, par exemple mesuré en personne-heures par année ; y représente l'investissement capitale, par exemple la valeur monétaire de l'ensemble des immeubles et machines ; et z représente la production totale de l'économie, par exemple mesuré en dollars) alors ses courbes de niveau expliquent les relations possibles entre x et y qui produisent la même production totale z.

Finalement, veuillez faire plusieurs exercices du manuel de Stewart ; il a créé des merveilleuses exercices formatifs. Par exemple, il vous invite à associer à chaque graphe de courbes de niveau le graphe de la fonction correspondante ; d'associer les fonctions à leurs graphes de courbes de niveau ; et d'associer les fonctions à leurs graphes.

Exemples :

1. Trouver le domaine de $f(x, y) = x \ln(x^2 - y)$.

2. Trouver le domaine de $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{xy-1}}{x-1}$
3. Décrire le graphe de $f(x,y) = 2x+y-1$
4. Décrire le graphe de $f(x,y) = x^2+y^2$
5. Décrire le graphe de $f(x,y) = x^2-y^2$
6. Décrire le graphe de $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
7. Tracer les courbes à niveau de la fonction $z = \ln(x^2+4y^2)$ pour $z = k \in \{-2,-1,0,1,2\}$ sur le même graphe du plan xy. Déduire l'existence d'une singulairité (dite un pôle) à l'origine.
8. Tracer les courbes à niveau de la fonction $z = y\sec(x)$ sur le domaine $-\pi/2 < x < \pi/2$ et $y \in \mathbb{R}$ pour $z = k \in \{-2,-1,0,1,2\}$ sur le même graphe du plan xy. Qu'est-ce que ça veut dire quand nos courbes de niveau se croisent en un point ?

7.2 Les limites et la continuité

Veuillez lire la section "Les limites et la continuité" dans le manuel de Stewart. Les graphes, les exemples, et les explications sont impeccables. Par contre, sa définition de la limite d'une fonction ne nous est pas familier car il n'a pas dévéloppé la notion d'une suite, qui permet une définition simple. Alors le voici.

7.2.1 Les suites en $\mathbb{R}^2$

Rappel : la norme d'un vecteur (x,y) en $\mathbb{R}^2$ est $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$. La distance entre les points (x,y) et (a,b) est donc

$$\|(x,y)-(a,b)\| = \|(x-a,y-b)\| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

Exemple 7.1. La norme de $(3,4)$ est $\|(3,4)\| = \sqrt{9+16} = 5$. La distance entre les points $(1,2)$ et $(5,-5)$ est

$$\|(5,-5)-(1,2)\| = \|(4,-7)\| = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}.$$

Définition 7.2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soient $(x_n,y_n) \in \mathbb{R}^2$; donc c'est une suite de vecteurs. Alors on dit que la suite $\{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (a,b), et on écrit

$$\lim_{n\to\infty} (x_n,y_n) = (a,b),$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \; t.q. \; \forall n \geq N, \quad \|(x_n,y_n)-(a,b)\| < \varepsilon.$$

Exemple 7.3. Soit la suite $\{(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$. Alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) = (0,1)$ car

$$\|(x_n,y_n)-(a,b)\| = \|\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) - (0,1)\| = \|\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)\| = \frac{\sqrt{2}}{n}$$

et donc : si $\varepsilon > 0$, si on prend, par la propriété archimédienne, un $N \in \mathbb{N}$ avec $N > \varepsilon/\sqrt{2}$, alors pour tout $n \geq N$, nous avions $\|(x_n,y_n)-(a,b)\| < \frac{\sqrt{2}}{n} < \frac{\sqrt{2}}{N} < \varepsilon$, cqfd.

Exemple 7.4. Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers a. On peut démontrer que pour toute constante c, $(a_n, c) \to (a, c)$ et $(c, a_n) \to (c, a)$, comme suit. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $a_n \to a$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|a_n - a| < \varepsilon$. Donc, pour tout $n \geq N$ nous avons

$$\|(a_n, c) - (a, c)\| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (c - c)^2} = |a_n - a| < \varepsilon$$

et de même pour l'autre ; cqfd.

Lemme 7.5. *Soient $a, b, x_n, y_n \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (a, b) \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad et \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b\Big)$$

La démonstration est un exercice. Ce lemme permet la détermination facile de la limite d'une suite de vecteurs.

$\Rightarrow$. Soit $\varepsilon > 0$. Supposonse que $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (a, b). Alors il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|(x_n, y_n) - (a, b)\| < \varepsilon$. Donc pour tout $n \geq N$ nous avons

$$|x_n - a| = \sqrt{(x_n - a)^2} \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} = \|(x_n, y_n) - (a, b)\| < \varepsilon$$

(et de même pour $|y_n - b|$), cqfd.

[$\Leftarrow$] Soit $\varepsilon > 0$ Supposons que $x_n \to a$ et $y_n \to b$. Alors il existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|x_n - a| < \varepsilon/\sqrt{2}$; et en même temps il existe un $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $|y_n - b| < \varepsilon/\sqrt{2}$. Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$; alors pour tout $n \geq N$ nous avons les deux inégalités, et donc

$$\begin{aligned}
\|(x_n, y_n) - (a, b)\| &= \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} \\
&< \sqrt{(\varepsilon/\sqrt{2})^2 + (\varepsilon/\sqrt{2})^2} \\
&= \sqrt{2\varepsilon^2/2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Exemple 7.6. Les suites de vecteurs suivantes convergent toutes vers $(0, 0)$:

$$(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), (\frac{1}{n}, -\frac{1}{n^2}), ((-1)^n \frac{1}{n}, \frac{1}{n^4}), (\frac{47n}{n^2 + 3n - 3}, \frac{345n^2 - 324n - 23}{234n^4 - n^3 - n^2 - 1}), \ldots$$

La variété de façons qu'on peut approcher un point en $\mathbb{R}^2$ est énorme : il ne s'agit pas tout simplement de gauche et de droite, ou le long des axes — vous pouvez choisier n'importe quelle chemin d'approche !

Par exemple : soit f, g deux fonctions continues en 0 telles que $f(0) = 0 = g(0)$. Alors (exercice) pour toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0, on a

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n), g(x_n)) \to (0, 0).$$

En particulier, si $f(x) = x$, ceci donne des chemins correspondants à toute graphe d'une fonction continue en 0, comme $g(x) = x^2 \sin(1/x)$, $g(x) = e^x - 1$, $g(x) = \ln(x + 1)$, $\cdots$.

7.2.2 La limite d'une fonction de deux variables

La définition de la limite d'une fonction en un point est la même.

Définition 7.7. Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ et soit $f\colon D \to \mathbb{R}$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel qu'il existe au moins une suite d'éléments de D qui converge vers (a,b). Alors on dit que la limite lorsque (x,y) s'approche à (a,b) de f est L, écrit $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, si

$$\forall \{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D \setminus \{(a,b)\} \; t.q. \quad (x_n,y_n) \to (a,b), \quad f(x_n,y_n) \to L.$$

Exemple 7.8. Soit $f(x,y) = xy$. Soit $(a,b) = (3,4) \in \mathbb{R}^2$. Soit $\{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$, tel que $(x_n,y_n) \neq (3,4)$ pour tout n, et telle que $x_n \to 3$, $y_n \to 4$. Alors

$$f(x_n,y_n) = x_n y_n \to 3 \cdot 4 = 12$$

car le produit de deux suites convergentes converge vers le produit des limites. C'est vrai pour n'importe quelle suite $(x_n,y_n) \to (3,4)$, donc

$$\lim_{(x,y)\to(3,4)} f(x_n,y_n) = 12.$$

Exemple 7.9. Soit $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$. Son domaine est

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 25\},$$

un disque de rayon 5 centrée à l'origine.

Soit $(a,b) = (3,4) \in D$. Soit $\{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs dans D, tel que $(x_n,y_n) \neq (3,4)$ pour tout n, et telle que $x_n \to 3$, $y_n \to 4$. Alors par le thm de l'algèbre de suites convergentes, nous avons $25 - x_n^2 - y_n^2 \to 0$, or

$$f(x_n,y_n) \to \sqrt{0} = 0$$

par la continuité de la racine carrée. C'est vrai pour toute telle suite, or

$$\lim_{(x,y)\to(3,4)} f(x_n,y_n) = 0.$$

Veuillez noter qu'il existe beaucoup de suites qu'on aurait pu construire en choisissant $x_n \to 3$ et $y_n \to 4$, qui n'auront pas donné des suites de vecteurs en D (et donc à laquelle on n'aurait pas pu appuyer la fonction f).

Exemple 7.10. Est-ce que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ existe ?

Solution : Le domaine est $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Soit $a_n \to 0$ n'importe quelle suite qui n'atteint jamais 0. Alors $(a_n, 0) \in D$, et on évalue

$$f(a_n,0) = \frac{a_n^2 - 0}{a_n^2 + 0} = 1,$$

qui converge donc vers 1. Par contre, la suite $(0,a_n)$ tend également vers $(0,0)$ et est aussi dans le domaine D, et on a

$$f(0,a_n) = \frac{0 - a_n^2}{0 + a_n^2} = -1,$$

qui converge donc vers -1. Puisqu'on a obtenue deux valeurs différentes, la limite de la fonction n'existe pas en $(0,0)$.

Exemple 7.11. Est-ce que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ existe ?

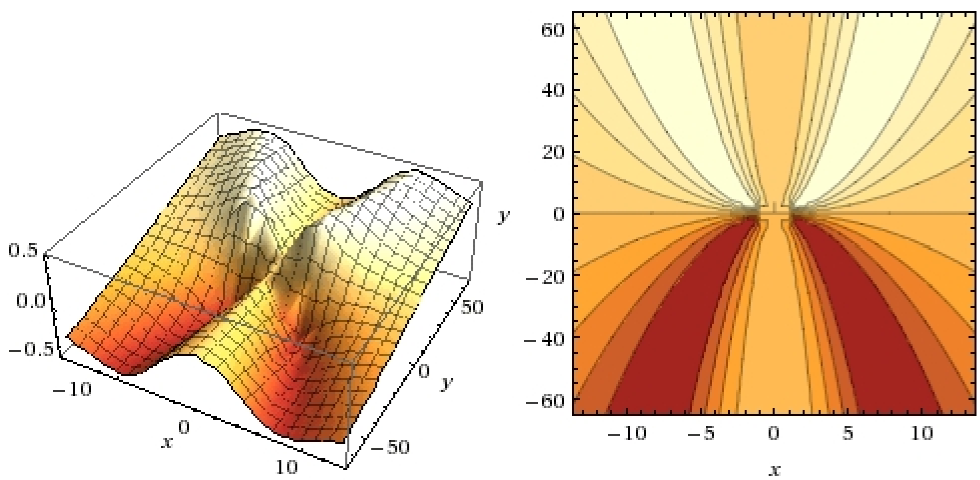
Solution : Le domaine est $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Soit $a_n \to 0$ n'importe quelle suite qui n'atteint jamais 0. Alors $(a_n, 0) \in D$, et cette fois $f(a_n, 0) \to 0$ et $f(0, a_n) \to 0$. Par contre, $(a_n, a_n) \to (0,0)$ et

$$f(a_n, a_n) = \frac{a_n^2}{a_n^2 + a_n^2} = \frac{1}{2},$$

qui ne converge pas vers 0. Puisqu'on a obtenue deux valeurs différentes, la limite de la fonction n'existe pas en $(0,0)$.

L'existence de la limite en suivant les axes principaux n'implique pas l'existence de la limite. Il faut que TOUTE suite mène à la même limite.

Exemple 7.12. Est-ce que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ existe ?



[1]

Solution : Le domaine est $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Soit $x_n \to 0$ n'importe quelle suite qui n'atteint jamais 0. Alors $(x_n, 0) \in D$, et cette fois $f(x_n, 0) \to 0$ et $f(0, x_n) \to 0$. En effet, pour n'importe quelle constante m (représentant la pente) on a $(x_n, mx_n) \to (0,0)$ et

$$f(x_n, mx_n) = \frac{mx_n^3}{x_n^4 + m^2x_n^2} = \frac{mx_n}{x_n^2 + m^2} \to 0.$$

On dirait que la limite existe, et vaut zéro — mais c'est faux. Prenons la suite

$$(x_n, x_n^2) \to (0,0)$$

1. Le graphe et les courbes de niveau de la fonction $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$. Les valeurs maximales de ce graphe se trouvent le long de la courbe $y = x^2$ et les valeurs minimales se trouvent le long de la courbe $y = -x^2$. Toute droite passant par l'origine va croiser les courbes de niveau mais ne les suivra jamais, et donc la valeur de la fonction fini par s'approcher à nulle. Ces graphes viennent d'un site web.

et

$$f(x_n, x_n^2) = \frac{x_n^2 x_n^2}{x_n^4 + (x_n^2)^2} = \frac{x_n^4}{x_n^4} = 1 \to 1.$$

Puisqu'on a obtenue deux valeurs différentes, la limite de la fonction n'existe pas en $(0,0)$. Voir la figure.

7.2.3 La continuité

Nous avons la même définition de la continuité d'une fonction à plusieurs variables.

Définition 7.13. Une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ est continue en $(a,b) \in D$ si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$, c-à-d : si pour toute suite $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans D qui converge vers (a,b), il faut que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = f(a,b).$$

Exemple 7.14. Les fonctions $f(x,y) = xy$ et $g(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ sont continues en $(3,4)$, par des exemples précédents. En effet, elles sont continues sur leur domaines.

Proposition 7.15. *Les fonctions $f(x,y) = x$ et $g(x,y) = y$ sont continues. Toute fonction qui est le produit, la composée, le quotient, la somme ou la différence de fonctions continues est continue sur son domaine.*

Démonstration. Soit $\{(x_n, y_n)\}$ une suite dans $\mathbb{R}^2$ qui converge vers (x,y). Alors par Lemme 7.5, $f(x_n, y_n) = x_n$ converge vers x et $g(x_n, y_n) = y_n$ converge vers y. Donc f et g sont continues en tout point (x,y) de leur domaine $\mathbb{R}^2$.

Soient f et g maintenant n'importe quelles fonctions continues, définies sur un domaine $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Soit $\{(x_n, y_n)\}$ une suite dans D qui converge vers $(x,y) \in D$. Alors par la continuité, on a

$$f(x_n, y_n) \to f(x,y) \quad \text{et} \quad g(x_n, y_n) \to g(x,y).$$

Posons $a_n = f(x_n, y_n)$, $a = f(x,y)$, $b_n = g(x_n, y_n)$ et $b = g(x,y)$. Soit $c \in \mathbb{R}$. Donc $a_n \to a$ et $b_n \to b$, alors par le théorème d'algèbre de suites convergentes, $ca_n \to ca$, $a_n + b_n \to a + b$, $a_n b_n \to ab$ et si $b \neq 0$, on a aussi $a_n/b_n \to a/b$. Donc

$$cf(x_n, y_n) \to cf(x,y), \quad f(x_n, y_n) + g(x_n, y_n) \to f(x,y) + g(x,y) \quad \text{et} \quad f(x_n, y_n)g(x_n, y_n) \to f(x,y)g(x,y)$$

et si $g(x,y) \neq 0$, on a que $f(x_n, y_n)/g(x_n, y_n) \to f(x,y)/g(x,y)$. Donc toute somme, différence, produit et quotient de deux fonctions continues est continues (sur leur domaine, qui exclut alors tout point où le dénominateur d'un quotient est 0).

La composée est intéressante, car il y en a plusieurs cas possibles. Démontrons une des possibilités.

Soit h et k deux fonctions réelles à une variable. Soit u dans le domaine de h et v dans le domaine de k. Posons $x = h(u)$ et $y = g(v)$. Alors si $(x,y) \in D$, on peut définir la composée

$$f(h(u), k(v)).$$

Si h est continue en u et k est continue en v et f est continue en (x,y), démontrons que la composée est continue.

Bien : soit (u_n, v_n) une suite qui converge vers (u, v). Alors $u_n \to u$ donc par la continuité, $h(u_n) \to h(u) = x$. Aussi $v_n \to v$ alors $k(v_n) \to k(v) = y$. Donc $(h(u_n), k(v_n)) \to (x, y)$, or

$$f(h(u_n), k(v_n)) \to f(x, y)$$

cqfd. $\square$

Cette proposition nous permet de conclure que toute fonction composée de fonctions continues d'un variable seront continues.

Exemple 7.16. Soit la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x-y} & \text{si } x \neq y\,; \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

On remarque que $\frac{x^2-y^2}{x-y} = x + y$, et la côté droite est une fonction définie (et continue) sur tout $\mathbb{R}^2$. Donc la limite en un point (a, a) (sur la droite $x = y$) est $a + a = 2a$. Mais ce n'est égale à $f(a, a)$ sauf en $(0, 0)$. Or, la fonction est continue en $(0, 0)$, et en tout (a, b) tel que $a \neq b$.

Exemple 7.17. Soit la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Elle n'est pas continue en $(0, 0)$ car la limite n'y existe même pas.

7.2.4 Exercices

Faire quelques exercices dans Stewart.

Aussi : témontrer que si $h(x)$ et $f(x, y)$ sont continues et la composée $h \circ f$ est définie en (x, y) alors elle est continue en (x, y).

7.3 Les dérivées partielles

C'est la section "Les dérivées partielles" en Stewart.

Les points importants :

- comment calculer une dérivée partielle
- que ça représente le taux de variation de la fonction par rapport à un axe standard
- qu'il y a quatre dérivées partielles d'ordre 2 qu'on peut calculer
- que si f_{xy} et f_{yx} sont continues, alors elles sont égales (thm de clairaut)

Faites les exercices en Stewart (mais vous pouvez omettre ceux à trois variables et plus, et ceux qui parlent des équation différentielles). Dans l'édition du cours : Secton 4.1 Exercices 9-42, 51-58.

7.4 La dérivée

7.4.1 La définition de la différentiabilité, et l'approximation linéaire

Lire Stewart "Les plans tangents et les approximations linéaires" (mais omettre les différentielles).

Les points importants :

- la définition de la dérivabilité (differentiabilité)
- qu'avoir des dérivées partielles ne suffit pas pour être dérivable
- qu'avoir des dérivées partielles continues suffit pour être dérivable
- qu'être dérivable veut dire que la fonction peut être bien approximée par une fonction linéaire proche de chaque point ; le graphe de cette fonction linéaire est le *plan tangent*
- l'équation du plan tangent

Soit f une fonction définie en (x_0, y_0) et soit $z_0 = f(x_0, y_0)$. Supposons pour l'instant que le plan tangent existe. Ce plan aura une équation de la forme

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

puisqu'il passe par (x_0, y_0, z_0). Si $C = 0$, c'est un plan verticale et, comme le cas de fonctions d'une variable, on dira que f n'y est pas différentiable. Alors supposons que $C \neq 0$; alors on peut récrire le plan sous forme d'une fonction, qui serait alors la linéairization $z = L(x, y)$ de f en (x_0, y_0) :

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0).$$

Si on prend la trace $y = y_0$, on obtient

$$z - z_0 = a(x - x_0)$$

qui devrait alors être la droite tangente à la fonction $z = f(x, y_0)$ (fonction du variable x, en tenant $y = y_0$ contante) en $x = x_0$. On conclut que $a = f_x(x_0, y_0)$. De l'autre part, en prenant la trace $x = x_0$, on obtient une équation

$$z - z_0 = b(y - y_0)$$

qui devrait représenter la linéarization de $z = f(x_0, y)$ (fonction d'une seule variable y, en tenant $x = x_0$ constante) au point $y = y_0$, or $b = f_y(x_0, y_0)$. Donc on a démontré le théorème suivant.

Théorème 7.18. *Soit $f(x, y)$ une fonction telle que le plan tangent existe en (a, b). Alors elle a l'équation*

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Exemple 7.19. Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$. Quel est le plan tangent à $z = f(x, y)$ en $(3, -2)$ (en prenant pour acquis qu'il existe) ?

Solution : on calcule $f_x(x, y) = 2x$ donc $f_x(3, -2) = 6$; $f_y(x, y) = 2y$ alors $f_y(3, -2) = -4$; et $z_0 = f(3, -2) = 13$. Donc l'équation du plan tangent est

$$z - 13 = 6(x - 3) - 4(y + 2).$$

Mais il faut faire attention : ça peut arriver que f_x et f_y existent sans que ce plan soit un plan tangent — car c'est possible que ce plan tangent n'existe pas, même si les dérviées partielles existent ! Voici un exemple.

Exemple 7.20. Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On a vu que cette fonction n'est pas continue en $(0,0)$, ayant un pli verticale en ce point. Donc il n'existe pas de plan tangent à cette surface au point $(0,0,0)$. Par contre, vérifions que $f_x(0,0)$ et $f_y(0,0)$ existent.

On utilise la définition. Afin de calculer $f_x(0,0)$, on fixe $y = 0$ en on calcule

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

De même,

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Alors les deux dérivées partielles existent en $(0,0)$, or l'équation du plan dans le théorème est

$$z = 0.$$

Mais ce plan coupe la surface ; il n'y est pas tangent.

Alors, ce qu'il nous faut, cette une définition de différentiabilité, c-à-d, de l'existence d'un plan tangent à la surface $z = f(x,y)$. Donnons la définition, et ensuite un peu de motivation pour cette définition un peu étrange.

Définition 7.21. Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction avec domaine $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Soit (x_0, y_0) à l'intérieure de D. Alors on dit que f est différentiable ou dérivable en (x_0, y_0) s'il existe deux fonctions ε_1 et ε_2 telles que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon_1(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon_2(x,y) = 0$$

et telle que

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \varepsilon_1(x,y)(x-x_0) + \varepsilon_2(x,y)(y-y_0).$$

En effet, cette définition dit que f est différentiable en un point si la différence entre $f(x,y)$ et $L(x,y)$ est une fonction qui tend vers 0 plus rapidement que $x \to x_0$ et $y \to y_0$. D'où vient-il ?

Si $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable, alors g est dérivable en x_0 si

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \quad \text{existe et vaut } g'(x_0).$$

Si on pose $\varepsilon(x) = \dfrac{g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x-x_0)}{x - x_0}$, ceci est équivalent à dire

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

et que $g(x) - g(x_0) = g'(x_0)(x-x_0) + \varepsilon(x)(x-x_0)$. Donc la définition de la dérivabilité d'une fonction à 2 variables est un analogue de ceci.

Remarque 7.22. Une variation de cette définition, qui est plus naturelle, est le suivant.

Définition 7.23. Soit f une fonction de deux variables et (x_0, y_0) un point de son domaine où ses dérivées partielles existent. Soit $L(x, y)$ la linéairisation de f en $(x_0, y_0$, qui est

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(y - y_0).$$

Alors f est *différentiable* en (x_0, y_0) si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - L(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

C'est possible d'évaluer cette limite afin de vérifier la différentiabilité de f ; mais pour l'instant le théorème suivant nous suffira.

Par contre, ce n'est pas facile à vérifier cette définition. On a le théorème suivant.

Théorème 7.24. *Soit (x_0, y_0) à l'intérieure du domaine $D \subseteq \mathbb{R}^2$ d'une fonction $f(x, y)$. Si $f_x(x, y)$ et $f_y(x, y)$ sont continues en (x_0, y_0) alors f est dérivable en (x_0, y_0).*

Exemple 7.25. Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$. Alors $f_x(x, y) = 2x$ et $f_y(x, y) = 2y$ sont continues en tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, alors cette fonction est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 7.26. Soit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Alors

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^2+y^2)-2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(où on a utilisé la définition pour calculer $f_x(0, 0)$ dans un exemple précédent). Ce n'est pas une fonction continue car $f_x(0, y) = \frac{1}{y}$, qui a un asymptote en 0.

Cette condition de la continuité des dérivées partielles apparait dans plusieurs contextes.

Par exemple, rappel qu'on a défini les dérivées partielles d'ordre 2.

Théorème 7.27 (Clairaut)**.** *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction avec domaine $D \subseteq \mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) un élément à l'intérieure de D tel que f_{xy} et f_{yx} existent et sont continues en (x_0, y_0). Alors*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

C'est un fait intéressant en MAT2522 ; mais pour l'instant, pour nous, son utilité se trouve principalement dans le fait qu'il nous aide à vérifier nos dérivées partielles. Si on n'arrive pas à $f_{xy} = f_{yx}$ avec une fonction lisse f, on a fait une erreur de calcul. (Il faudra avoir des resultats qui nous aide à prédire la continuité de la deuxième dérivée si on voulait utiliser se théorème afin d'éviter le calcul d'une des dérivées partielles d'ordre 2 !)

Exemple 7.28. La fonction $f(x, y) = x \cos(y)$ a comme dérivées partielles $f_x(x, y) = \cos(y)$ et $f_y(x, y) = -x \sin(y)$. Alors $f_{xy}(x, y) = -\sin(y) = f_{yx}(x, y)$, et c'est une fonction continue.

Exemple 7.29. L'exemple classique d'une fonction dont le Thm de Clairaut ne s'applique pas, et que $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$, est la suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Si on calcule la dérivée $f_x(0,y)$ (c'est à dire : on tient y fixe et on prend la dérivée par rapport à x en $x_0 = 0$) on obtient $f_x(0,y) = -y$, or $f_{xy}(0,y) = -1$. De même, $f_y(x,0) = x$ pour tout x or $f_{yx}(x,0) = 1$. Donc $f_{xy}(0,0) = -1 \neq f_{yx}(0,0) = 1$.

Remarque 7.30. La démonstration de la continuité de f, f_x et f_y se fait en posant le changement de variables $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, qui simplifie le dénominateur.

Si $f\colon D \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, la matrice formée de ses dérivées partielles

$$\mathcal{D}f = [f_x \quad f_y]$$

est aussi dit sa dérivée. C'est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, et l'équation du plan tangent au point (a,b,c) sur le graphe $z = f(x,y)$ s'écrit

$$z - c = [f_x(a,b) \quad f_y(a,b)] \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix} = (\mathcal{D}f)(a,b) \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}$$

qui est l'analogue deux-dimensionelle de l'équation $y - b = f'(a)(x-a)$ pour la droite tangente d'une fonction à un variable.

Faites les premiers exercices de cette section (1-6).

7.4.2 La règle de dérivation en chaîne (ou dérivée de fonctions composées)

Lire la section de Stewart "La règle de dérivation en chaîne".

Les points importants :

- qu'il faut comprendre toutes les chemins par laquelle f dépend d'un variable x, et la dérivée sera la somme des dérivées en chaîne de tous ces possibilités.

Faites les exercices 1-14 de cette section.

Rappel : si $y = f(u)$ et $u = g(x)$ alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Théorème 7.31. *Soit $z = f(x,y)$ une fonction à deux variables dérivable et soient $x = g(t), y = h(t)$ deux fonctions à une variable dérivables, telle que la composée*

$$z = f(g(t), h(t))$$

existe. Alors

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Exemple 7.32. Soit $z = x^2 y$, $x = \sin(t)$, $y = \ln(t)$. Alors

$$\frac{dz}{dt} = (2xy)(\cos(t)) + (x^2)(\frac{1}{t}) = 2\sin(t)\ln(t)\cos(t) + \frac{\sin^2(t)}{t}$$

qu'on peut vérifier est vrai, en dévelopant $z = \sin^2(t)\ln(t)$ et prendre sa dérivée.

Démonstration. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 = g(t_0)$, $y_0 = h(t_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$. Posons $\Delta z = z - z_0$, $\Delta x = x - x_0$ et $\Delta y = y - y_0$. Alors le fait que f est dérivable en (x_0, y_0) nous dit qu'il existe des fonctions ε_1 et ε_2 telles que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2 = 0$$

et que

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y.$$

Rappel que $f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}$ et $f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial y}$; alors si on divise par $\Delta t = t - t_0$ partout on obtient

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Lorsque $\Delta t \to 0$, les quotients tendent vers les dérivées, et on a à la limite

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \lim_{\Delta t\to 0} \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0} \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Puisque g et h sont continues, le fait que $\Delta t \to 0$ entraine que $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$, et alors $\varepsilon_1 \to 0$ et $\varepsilon_2 \to 0$. □

Théorème 7.33. *Soit $z = f(u, v)$ une fonction dérivable, et $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$ deux fonctions dérivables, telles que la compoée*

$$z = f(g(x, y), h(x, y))$$

soit définie. Alors

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \quad \textit{et} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Puisqu'on trouve la dérivée partielle par rapport à x en tenant y constante, ces deux formules ne sont que l'expression du théorème précédent.

Exemple 7.34. Si $z = v\ln(u)$, $u = x\sin(y)$, $v = 2x + 3y + 4$, alors

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\frac{v}{u})\sin(y) + \ln(u)\cdot 2 = (\frac{2x+3y+4}{x\sin(y)})\sin(y) + 2\ln(x\sin(y))$$

et

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\frac{v}{u})x\cos(y) + \ln(u)\cdot 3 = (\frac{2x+3y+4}{x\sin(y)})x\cos(y) + 3\ln(x\sin(y)).$$

En générale, on dessine un diagramme indiquant les dépendences des variables, et chaque branche de cet arbre correspond à une chaine de dérivées à calculer. (Voir Stewart).

Exemple 7.35. Si $z = e^{xy}$, $x = \sin(u) + v$, $y = u^2 + v^2$, $u = 3t$ et $v = t^3$, on a

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

7.5 Les dérivées directionnelles et le vecteur gradient

Lire la section “Les dérivées directionnelles et le vecteur gradient” de Stewart (mais pas les plans tangents de surfaces de niveau).

Les points importants :

- $\vec{\nabla} f = (f_x, f_y)$, le gradient
- que le gradient est un vecteur qui en tout point indique la direction de la plus rapide croissance de la fonction
- que si $\vec{u}$ est un vecteur *unitaire* (de longueur 1), alors la dérivée de f dans la direction de $\vec{u}$ est $f_{\vec{u}} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u}$ et elle représente le taux de variation de f dans la direction de $\vec{u}$.

Voir aussi le sommaire qui est encadré à la fin de la section.

Faites les exercices de 1 à 26 qui concernent des fonctions à deux variables.

Les dérivées partielles nous donnent le taux de variation instantané de la fonction $z = f(x, y)$ dans les deux directions principaux ($\hat{\imath} = (1, 0)$ et $\hat{\jmath} = (0, 1)$) à chaque point.

Définition 7.36. Le *gradient* de f en (x, y) est le vecteur

$$\vec{\nabla} f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = \begin{bmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{bmatrix}.$$

Les composantes de ce vecteur représentent les taux de variation instantané de f dans les directions coordonnées.

Dans ce cas, ce n'est la transposée de la matrice de la dérivée. On verra sous peu pourquoi qu'on veut interpreter la dérivée comme un vecteur dans ce contexte.

Exemple 7.37. Soit $f(x, y) = x \sin(y)$. Alors $\vec{\nabla} f(x, y) = (\sin(y), x \cos(y))$.

Mais ne pourrait-on pas calculer le taux de variation instantané dans n'importe quelle direction ?

Oui, certainement ; on appellera cette taux de variation instantané la *dérivée directionnelle* de f dans la direction d'un vecteur $\vec{u} = (a, b)$ donné. Afin de la définir précisement, calculons la pente de la droite qui commence en (x_0, y_0) et termine en $(x_0, y_0) + h(a, b) = (x_0 + ha, y_0 + hb)$, pour un h petit et positif. Ce serait

$$\frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{\|(x_0 + ha, y_0 + hb) - (x_0, y_0)\|} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{\|h\vec{u}\|}.$$

Donc c'est plus simple si notre vecteur $\vec{u}$ satisfait $\|\vec{u}\| = 1$.

Rappel : si $\vec{u} = (a, b)$ est un vecteur nonnul alors $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a, b) = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ est le vecteur de longueur 1 dans la même direction de $\vec{u}$. (Exemple : le vecteur unitaire dans la direction $(1, 2)$ est $\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2) = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.)

Comme ça, on déduit que la pente serait

$$\frac{f(x_0+ha,y_0+hb)-f(x_0,y_0)}{h}$$

et que cette formule donne aussi le bon résultat pour $h<0$.

Définition 7.38. Soit $\vec{u}=(a,b)$ un vecteur tel que $\|\vec{u}\|=1$. Alors la dérivée directionnelle de f dans la direction $\vec{u}$ est

$$f_{\vec{u}}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+ha,y+hb)-f(x,y)}{h}$$

si cette limite existe.

Exemple 7.39. Soit $f(x,y)=x^2+y^2$. Supposons qu'on veut la dérivée directionnelle de f dans la direction $(1,1)$. Alors on pose $\vec{u}=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$, et on calcule

$$\begin{aligned}
f_{\vec{u}}(x,y)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+ha,y+hb)-f(x,y)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{(x+\frac{h}{\sqrt{2}})^2+(y+\frac{h}{\sqrt{2}})^2-x^2-y^2}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2xh}{\sqrt{2}}+\frac{h^2}{2}+\frac{2yh}{\sqrt{2}}+\frac{h^2}{2}}{h}\\
&=\sqrt{2}(x+y).
\end{aligned}$$

Donc, par exemple, quand $x=-y$, $f_{\vec{u}}(x,y)=0$; et on voit que c'est raisonnable en traçant les courbes de niveau de f.

Par contre, veuillez noter que la dérivée directionnelle de f dans la direction $(-1,-1)$ est

$$\begin{aligned}
f_{-\vec{u}}(x,y)&=\lim_{h\to 0}\frac{(x-\frac{h}{\sqrt{2}})^2+(y-\frac{h}{\sqrt{2}})^2-x^2-y^2}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{-\frac{2xh}{\sqrt{2}}+\frac{h^2}{2}-\frac{2yh}{\sqrt{2}}+\frac{h^2}{2}}{h}\\
&=-\sqrt{2}(x+y).
\end{aligned}$$

C'est bon : si on va dans la direction opposée, le taux de variation de f devrait certainement être le négatif.

Par contre, n'existe-t-il pas d'autre moyen de calculer cette dérivée directionnelle ?

Théorème 7.40. *Soit $\vec{u}=(a,b)$ un vecteur tel que $\|\vec{u}\|=1$. Alors en tout point (x,y) dont f est dérivable, nous avons*

$$f_{\vec{u}}(x,y)=\vec{\nabla}f(x,y)\cdot\vec{u}=af_x(x,y)+bf_y(x,y).$$

Remarquons que c'est aussi égale à $Df(x,y)\vec{u}$, le produit de la matrice de la dérivée par le vecteur $\vec{u}$.

Exemple 7.41. On fait une vérification rapide. Soit $f(x,y) = x^2 + y^2$; alors $\vec{\nabla} f(x,y) = (2x, 2y)$. Donc si $\vec{u} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ on a

$$f_{\vec{u}}(x,y) = (2x,2y) \cdot (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y$$

qui coincide avec ce qu'on a calculé directement.

Preuve du théorème. Le calcule directe n'est pas utile, car on n'arrive pas à séparer les limites. Par contre, voici une autre approche, qui vient de penser à l'idée de la dérivée directionnelle.

Soit $g(t) = f(x+ta, y+tb)$. Pour un (x,y) fixe, c'est une fonction d'une variable, et sa dérivée en 0 est exactement la dérivée directionnelle de f en direction $\vec{u} = (a,b)$ si $\|\vec{u}\| = 1$, car

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+ha, y+hb) - f(x,y)}{h}.$$

Mais on pourrait également calculer $g'(t)$ par la règle de dérivation de fonctions composées, car si on pose $x(t) = x + ta$ et $y(t) = y + tb$ on a

$$g(t) = f(x(t), y(t)).$$

Alors

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

qui donne, en évaluant le tout à $t = 0$ donc à $(x(t), y(t)) = (x,y)$:

$$g'(0) = af_x(x,y) + bf_y(x,y).$$

□

Exemple 7.42. Calculer la dérivée directionnelle de $f(x,y) = x\sin(y)$ dans les directions $(1,0)$ et $(3,4)$ au point $(x_0, y_0) = (1,0)$.

On a $\vec{\nabla} f(x,y) = (\sin(y), x\cos(y))$. On reconnait que $f_{(1,0)}(x,y) = f_x(x,y)$ donc c'est $\sin(y)$, qui au point $(1,0)$ vaut 0.

Le vecteur unitaire dans la direction $(3,4)$ est $\vec{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. On a deux choix, qui nous mènent les deux à la bonne réponse :

1. On calcule

$$f_{\vec{u}}(x,y) = \vec{\nabla} f(x,y) \cdot \vec{u} = (\sin(y), x\cos(y)) \cdot (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) = \frac{3}{5}\sin(y) + \frac{4}{5}x\cos(y).$$

   C'est une formule pour la dérivée directionnelle de f pour tout (x,y), et alors

$$f_{\vec{u}}(1,0) = \frac{3}{5}(0) + \frac{4}{5}(1)(1) = \frac{4}{5}.$$

2. On calcule

$$f_{\vec{u}}(1,0) = \vec{\nabla} f(1,0) \cdot \vec{u} = (0,1) \cdot (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) = \frac{4}{5}.$$

Le vecteur gradient possède une interpretation géométrique importante.

Proposition 7.43. *Soit f une fonction dérivable en (x, y). Alors la valeur maximale de $f_{\vec{u}}(x, y)$, parmi toutes les directions $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ (tel que $\|\vec{u}\| = 1$) est*

$$\|\vec{\nabla} f(x, y)\|$$

et, si non-nulle, elle est atteinte dans la direction

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{\nabla} f(x, y)\|} \vec{\nabla} f(x, y).$$

Donc, $\vec{\nabla} f(x, y)$ indique, en chaque point, la direction de la plus haute croissance de f, et nous donne la pente maximale d'une droite tangente en ce point.

Exemple 7.44. Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$. Alors $\vec{\nabla} f(x, y) = (2x, 2y)$. Au point $(0, 0)$, $\vec{\nabla} f(x, y) = (0, 0)$ et la fonction a dérivée zéro en toute direction. Autrement, le taux de croissance maximale en un point (x, y) est de $2\|(x, y)\|$ et se réalise dans la direction radiale de l'origine.

Démonstration de la proposition. Rappel que

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = \|\vec{w}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs. Alors si $\|\vec{u}\| = 1$, on calcule

$$f_{\vec{u}}(x, y) = \vec{\nabla} f(x, y) \cdot \vec{u} = \|\vec{\nabla} f(x, y)\| \cos(\theta),$$

qui prend valeur maximale $\|\vec{\nabla} f(x, y)\|$ uniquement quand $\theta = 0$, c'est à dire, quand $\vec{u}$ est dans la direction de $\vec{\nabla} f(x, y)$. □

Remarque 7.45. La valeur maximale des dérivées directionnelles est forcément ≥ 0, car si le taux de croissance de f dans la direction $\vec{u}$ est négative, elle sera positive dans la direction $-\vec{u}$.

C'est un resultat utile, car il nous permet de déterminer précisement la direction de la plus haute croissance d'une fonction f, sans tracer les courbes de niveau. Mais quelle est la relation entre les courbes de niveau et le gradient ?

Théorème 7.46. *Soit f une fonction dérivable. Alors en tout point (x, y), le gradient de f est orthogonale à la courbe de niveau de f passant par (x, y).*

Démonstration. Un vecteur $\vec{v}$ est orthogonale à une courbe en (x_0, y_0) si $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ pour toute vecteur tangent à la courbe en ce point. Mais si $\vec{u}$ est un vecteur unitaire et $\vec{v} = \vec{\nabla} f(x_0, y_0)$, alors dire qu'ils sont orthogonaux est équivalent à dire

$$f_{\vec{u}}(x_0, y_0) = \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \vec{u} = 0.$$

Donc $\vec{u}$ indique une direction dans laquelle de taux de croissance de f est nulle, c-à-d, il est un vecteur tangent à la courbe de niveau en ce point. □

Index

Bibliographie

[B] Bussey, W. H. , “The Origin of Mathematical Induction,” *The American Mathematical Monthly*, Vol. 24, No. 5 (May, 1917), pp. 199-207.

[LM] Labelle, Jacques et Mercier, Armel. *Introduction à l'analyse réelle,* Modulo Éditeur, 1993.

[S] Stewart, James. *Calcul intégrale, Calcul à plusieurs variables*, traduction de la 6e édition, Modulo 2012.

[T] Trench, William F. *Introduction to Real Analysis*, Copyright 2003 (Updated September 2011), William F. Trench, all rights reserved. This book was previously published by Pearson Education, and is now available on the website of the author (http ://ramanujan.math.trinity.edu/wtrench/misc/index.shtml, accessed Dec 2011).