Université d'Ottawa
Faculté des sciences
University of Ottawa
Faculty of Science

PHY2723 Electricité et magnétisme, hiver 2013

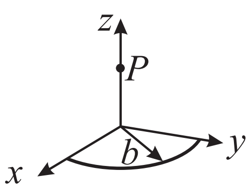
Examen final

Mardi 23 avril 9 h 30. Professeur : Christian Gigault. Durée : 3 heures. Répondez à toutes les questions dans autant de livrets que vous voulez, tous les problèmes ont la même valeur. L'examen est à livre fermé, vous avez droit à deux feuilles format « lettre » recto-verso. Calculatrice non-graphique, non-programmable permise. (Nombre de pages : 4)

Sauf indication contraire, les situations des problèmes sont dans le vide, prenez $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$.

---

1. Quel est le champ électrique en un point le long de l'axe des z créé par un fil portant densité de charge ρ_l ayant la forme d'un quart de cercle de rayon b, (voir ci-dessous) ?

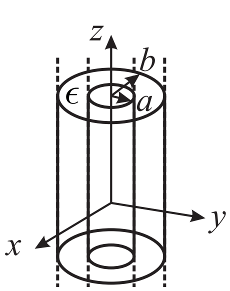


2. On a le potentiel électrique $V(r, \theta, \phi) = k \sin\theta \cos\phi \; e^{-br}$ où k et b sont des constantes positives.
(a) Quel est le champ électrique donné par ce potentiel ?
(b) Quelle est la densité de charge présente ?

3. On a le champ électrique statique $\vec{\mathbf{E}} = k(yz\vec{\mathbf{a}}_x + xz\vec{\mathbf{a}}_y + xy\vec{\mathbf{a}}_z)$, où k est une constante.
(a) Quel est le travail fait quand une charge q va du point A (1,0,0) à B (0,1,0) en allant en ligne droite de A à l'origine, puis de l'origine à B ?
(b) Ce champ électrique est-il un champ statique valide ?

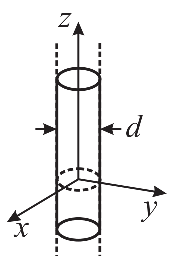
4. On a un volume sphérique de rayon a rempli d'une densité de charge $\rho_v = k/r$ où k est une constante positive.
(a) Quel est le champ électrique dans tout l'espace ?
(b) Quel travail a-t-il fallu dépenser pour assembler cette distribution de charges ?

5. Un conducteur cylindrique de rayon a et longueur infinie portant densité de charge ρ_s est entouré par un matériel diélectrique de constante diélectrique ϵ et rayon externe b, et le tout est dans le vide.
(a) Quels sont $\vec{\mathbf{E}}$, $\vec{\mathbf{D}}$ et $\vec{\mathbf{P}}$ partout dans l'espace ?
(b) Quels sont les densités de charge captives (*i. e.* liées) ?

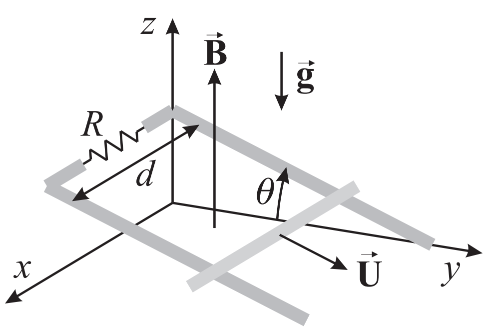


6. On a un très très long fil métallique ($1/\sigma = 2,83 \times 10^{-8}$ Ωm) de diamètre 2 mm portant un courant de 10 A.
(a) Quelle est la densité de courant dans le fil, qu'on suppose uniforme et en direction $+z$?
(b) Quel est le champ électrique à l'intérieur du fil ?
(c) Quelle est la résistance par unité de longueur du fil ?
(d) Quelle est la puissance dissipée par unité de longueur du fil ? (Approx. 0,901 W/m)
(e) À l'aide de la loi d'Ampère $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \mu I$, quelle est la valeur et direction du champ magnétique à la surface du fil (où $\rho = 1$ mm) ?
(f) Calculez le vecteur $\vec{\mathbf{S}} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}$ à la surface du fil (ce vecteur est nommé *vecteur de Poynting*).
(g) Montrez, en prenant une longueur de fil de 1 m, que le flux de $\vec{\mathbf{S}}$ traversant la surface du fil (où $\rho = 1$ mm) est égale en grandeur à la puissance dissipée par le fil :

$$\Phi_S \equiv \iint_s \vec{\mathbf{S}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -P \,.$$



7. Une barre métallique de masse 50 g glisse sans friction sur un circuit métallique de largeur $d = 10$ cm incliné d'un angle de 36.87° par rapport à l'horizontale. La résistance des parties métalliques est négligeable devant la résistance $R = 10$ Ω. Le tout est dans un champ magnétique orienté selon l'axe des z de valeur 10 T. L'accélération gravitationnelle est $g = 9,8$ m/s^2 et la barre est à $y = 0$ à $t = 0$.
(a) Si on suppose que la barre glisse a vitesse U, quel est le courant induit dans le circuit et dans quelle direction ?
(b) Quelle est la puissance dissipée par la résistance ?
(c) Quelle est la puissance venant de la gravité ? À l'aide de ce résultat et de celui de la partie (b), à quelle vitesse U la barre descend-elle ? (Approx 4.6 m/s)



$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}} \quad \vec{\mathbf{E}} = -\nabla V \quad \vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}} = \epsilon_0(1+\chi)\vec{\mathbf{E}} = \epsilon\vec{\mathbf{E}}$

$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int \frac{(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|^3}\,dq \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int \frac{1}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|}\,dq \quad U = qV$

$\nabla\cdot\vec{\mathbf{D}} = \rho_v \quad {}_s\vec{\mathbf{D}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} = Q \quad \nabla\times\vec{\mathbf{E}} = 0$ (statique)

Conducteurs : $E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon} \quad \vec{\mathbf{E}}_t = 0 \quad ; \quad \rho_v = 0 \quad \vec{\mathbf{E}} = 0$

$\rho_{sb} = \vec{\mathbf{P}}\cdot\vec{\mathbf{a}}_n \quad \rho_{vb} = -\nabla\cdot\vec{\mathbf{P}} \quad C \equiv Q_a/V_{ab} \quad W = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} Q_k V_k$

$\vec{\mathbf{J}} = \rho_v\vec{\mathbf{U}} = \sigma\vec{\mathbf{E}} \quad \sigma = Neu_e \quad I =_s \vec{\mathbf{J}}\cdot d\vec{s}$

$\nabla\cdot\vec{\mathbf{J}} + \frac{d\rho_v}{dt} = 0 \quad \rho_v = \rho_{v0}\,e^{-t/\tau} \quad \tau = \epsilon/\sigma$

$\vec{\mathbf{F}} = q(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{B}}) \quad \vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_c \frac{I d\vec{\mathbf{l}}\times(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|^3} \quad \nabla\cdot\vec{\mathbf{B}} = 0$

$\vec{\mathbf{m}} = I\vec{\mathbf{s}} \quad B_{1n} = B_{2n} \quad \frac{1}{\mu_1}\vec{\mathbf{B}}_{1t} = \frac{1}{\mu_2}\vec{\mathbf{B}}_{2t}$

$W = \frac{1}{2}{}_{\text{univers}}\left(\epsilon|\vec{\mathbf{E}}|^2 + \frac{1}{\mu}|\vec{\mathbf{B}}|^2\right)dv \quad d\vec{\mathbf{F}} = Id\vec{\mathbf{l}}\times\vec{\mathbf{B}}$

$\mu_0 \equiv 4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{N/A^2} \quad c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = 299792458\ \mathrm{m/s}$

$\vec{\mathbf{E}} = \frac{q(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}')}{4\pi\epsilon|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|^3} \quad \epsilon_0 \equiv 8.854187817\times10^{-12}\ \mathrm{C^2m^{-2}N^{-1}}$

$dq = \rho_l\,dl'$ ou $\rho_s\,ds'$ ou $\rho_v\,dv' \quad \vec{\mathbf{E}} = -\nabla V$

$\oint_c \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{l}} = 0 \quad V_2 - V_1 = -\int_1^2 \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{l}} \quad V = \frac{q}{4\pi\epsilon|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|}$

Diélectriques : $\vec{\mathbf{E}}_{1t} = \vec{\mathbf{E}}_{2t} \quad D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$

$W = \frac{1}{2}{}_v\rho_v V dv = \frac{1}{2}{}_{\text{univers}}\vec{\mathbf{D}}\cdot\vec{\mathbf{E}}\,dv = \frac{1}{2}CV^2$

$P = \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{U}}$, Dissipée : $P =_v \vec{\mathbf{E}}\cdot\vec{\mathbf{J}}\,dv = VI$

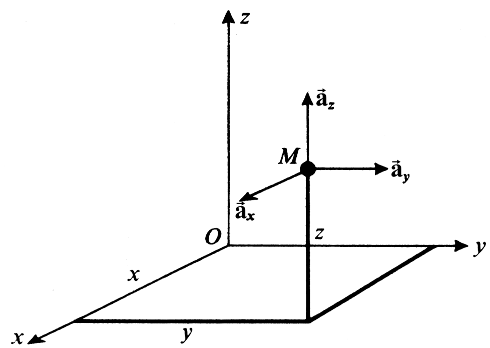
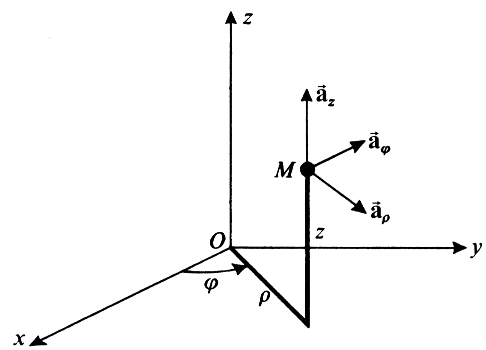
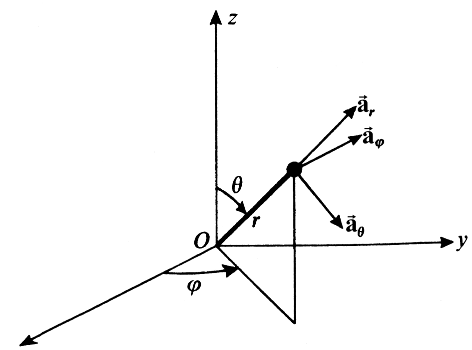
$J_{n1} = J_{n2} \quad \sigma_2 J_{t1} = \sigma_1 J_{t2} \quad R = \Delta V/I$

$\Phi =_s \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{s} \quad \oint\vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{l}} = \mu I \quad \vec{\mathbf{B}} = \mu\vec{\mathbf{H}}$

$\vec{\mathbf{T}} = \vec{\mathbf{m}}\times\vec{\mathbf{B}} \quad e_m = \oint\vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{l}} = -\frac{\partial}{\partial t}{}_S\vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi$

$$\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{B}}\cdot\vec{\mathbf{C}}\times\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{C}}\cdot\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}$$
$$\vec{\mathbf{A}}\times(\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{C}}) - \vec{\mathbf{C}}(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}})$$
$$\nabla(\psi V) = \psi\nabla V + V\nabla\psi$$
$$\nabla\cdot(\psi\vec{\mathbf{A}}) = \psi\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{A}}\cdot\nabla\psi$$
$$\nabla\times(\psi\vec{\mathbf{A}}) = \psi\nabla\times\vec{\mathbf{A}} + \nabla\psi\times\vec{\mathbf{A}}$$
$$\nabla\cdot(\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}) = \vec{\mathbf{B}}\cdot(\nabla\times\vec{\mathbf{A}}) - \vec{\mathbf{A}}\cdot(\nabla\times\vec{\mathbf{B}})$$
$$\nabla\cdot\nabla V = \nabla^2 V$$
$$\nabla\times\nabla\times\vec{\mathbf{A}} = \nabla(\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}}) - \nabla^2\vec{\mathbf{A}}$$
$$\nabla\times\nabla V = 0$$
$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{\mathbf{A}}) = 0$$
$$\int_V \nabla\cdot\vec{\mathbf{A}}\,dv = \oint_S \vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{d\mathbf{s}} \qquad \text{(Divergence theorem)}$$
$$\int_S \nabla\times\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{d\mathbf{s}} = \oint_C \vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{d\ell} \qquad \text{(Stokes's theorem)}$$

Differential elements	Rectangular (Cartesian)	Cylindrical	Spherical
	Coordinate system		
Length $\vec{d\ell}$	$dx\,\vec{\mathbf{a}}_x$	$d\rho\,\vec{\mathbf{a}}_\rho$	$dr\,\vec{\mathbf{a}}_r$
	$+dy\,\vec{\mathbf{a}}_y$	$+\rho\,d\phi\,\vec{\mathbf{a}}_\phi$	$+r\,d\theta\,\vec{\mathbf{a}}_\theta$
	$+dz\,\vec{\mathbf{a}}_z$	$+dz\,\vec{\mathbf{a}}_z$	$+r\sin\theta\,d\phi\,\vec{\mathbf{a}}_\phi$
Surface $\vec{d\mathbf{s}}$	$dy\,dz\,\vec{\mathbf{a}}_x$	$\rho\,d\phi\,dz\,\vec{\mathbf{a}}_\rho$	$r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,\vec{\mathbf{a}}_r$
	$+dx\,dz\,\vec{\mathbf{a}}_y$	$+d\rho\,dz\,\vec{\mathbf{a}}_\phi$	$+r\,dr\sin\theta\,d\phi\,\vec{\mathbf{a}}_\theta$
	$+dx\,dy\,\vec{\mathbf{a}}_z$	$+\rho\,d\rho\,d\phi\,\vec{\mathbf{a}}_z$	$+r\,dr\,d\theta\,\vec{\mathbf{a}}_\phi$
Volume dv	$dx\,dy\,dz$	$\rho\,d\rho\,d\phi\,dz$	$r^2 dr\ \sin\theta\,d\theta\,d\phi$

Cartésiennes	Cylindriques	Sphériques
		
$U = U(x, y, z)$ $\vec{\mathbf{A}} = A_x\vec{\mathbf{a}}_x + A_y\vec{\mathbf{a}}_y + A_z\vec{\mathbf{a}}_z$ $A_x = A_x(x, y, z)$ $A_y = A_y(x, y, z)$ $A_z = A_z(x, y, z)$	$U = U(\rho, \varphi, z)$ $\vec{\mathbf{A}} = A_\rho\vec{\mathbf{a}}_\rho + A_\varphi\vec{\mathbf{a}}_\varphi + A_z\vec{\mathbf{a}}_z$ $A_\rho = A_x \cos\varphi + A_y \sin\varphi$ $A_\varphi = -A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi$	$U = U(r, \theta, \varphi)$ $\vec{\mathbf{A}} = A_r\vec{\mathbf{a}}_r + A_\theta\vec{\mathbf{a}}_\theta + A_\varphi\vec{\mathbf{a}}_\varphi$ $A_r = A_\rho \sin\theta + A_z \cos\theta$ $A_\theta = A_\rho \cos\theta - A_z \sin\theta$ $A_\varphi = -A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi$
$\nabla U = (\partial U/\partial x)\vec{\mathbf{a}}_x$ $+ (\partial U/\partial y)\vec{\mathbf{a}}_y$ $+ (\partial U/\partial z)\vec{\mathbf{a}}_z$	$(\nabla U)_\rho = \partial U/\partial\rho$ $(\nabla U)_\varphi = [\partial U/\partial\varphi]/\rho$ $(\nabla U)_z = \partial U/\partial z$	$(\nabla U)_r = \partial U/\partial r$ $(\nabla U)_\theta = [\partial U/\partial\theta]/r$ $(\nabla U)_\varphi = [\partial U/\partial\varphi]/(r \sin\theta)$
$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$	$\nabla^2 U = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$	$\nabla^2 U = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}$
$\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$
$\nabla\times\vec{\mathbf{A}} = (\partial A_z/\partial y - \partial A_y/\partial z)\vec{\mathbf{a}}_x$ $+ (\partial A_x/\partial z - \partial A_z/\partial x)\vec{\mathbf{a}}_y$ $+ (\partial A_y/\partial x - \partial A_x/\partial y)\vec{\mathbf{a}}_z$	$(\nabla\times\vec{\mathbf{A}})_\rho = (\partial A_z/\partial\varphi)/\rho - \partial A_\varphi/\partial z$ $(\nabla\times\vec{\mathbf{A}})_\varphi = \partial A_\rho/\partial z - \partial A_z/\partial\rho$ $(\nabla\times\vec{\mathbf{A}})_z = [\partial(\rho A_\varphi)/\partial\rho - \partial A_\rho/\partial\varphi]/\rho$	$(\nabla\times\vec{\mathbf{A}})_r = [\partial(\sin\theta\, A_\varphi)/\partial\theta - \partial A_\theta/\partial\varphi]/(r\sin\theta)$ $(\nabla\times\vec{\mathbf{A}})_\theta = [\partial A_r/\partial\varphi - \sin\theta\, \partial(rA_\varphi)/\partial r]/(r\sin\theta)$ $(\nabla\times\vec{\mathbf{A}})_\varphi = [\partial(rA_\theta)/\partial r - \partial A_r/\partial\theta]/r$

CG