Version N° 1

Numéro d'étudiant:______________________________. Note totale: ____________sur 30

Question	1	2	3	4	5	6
Points						

Question 1. [4 points] Utiliser la définition de la dérivée pour calculer la dérivée de la fonction suivante

$$f(x) = 9 + \sqrt{2x-7}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{9 + \sqrt{2(x+h)-7} - \left(9 + \sqrt{2x-7}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2x+2h-7} - \sqrt{2x-7}}{h} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2x}+2h-\cancel{7}-\cancel{2x}+\cancel{7}}{h\left(\sqrt{2x+2h-7}+\sqrt{2x-7}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{2}{\sqrt{2x+2h-7}+\sqrt{2x-7}}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{2x-7}} = \frac{1}{\sqrt{2x-7}}$$

$$f'(x) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2x-7}}}$$

Question 2. [6 points] Utiliser les règles de dérivation pour calculer les dérivées des fonctions suivantes. Ne **pas** simplifier vos réponses.

(a) $f(x) = \cos(6x + \ln(6 - x))$

$$f'(x) = \cos'(6x + \ln(6-x)) = -(6x + \ln(6-x))' \sin(6x + \ln(6-x))$$

$$= -\left(6 + \frac{(6-x)'}{6-x}\right) \sin(6x + \ln(6-x))$$

$$= -\left(6 + \frac{-1}{6-x}\right) \sin(6x + \ln(6-x))$$

$$= \left(-6 + \frac{1}{6-x}\right) \sin(6x + \ln(6-x))$$

(b) $g(x) = \left(\frac{x \ln(x)}{e^{x^2} - 15}\right)^3$

$$g'(x) = \left(\left(\frac{x \ln(x)}{e^{x^2} - 15}\right)^3\right)' = 3 \cdot \left(\frac{x \ln(x)}{e^{x^2} - 15}\right)' \left(\frac{x \ln(x)}{e^{x^2} - 15}\right)^2$$

$$= 3\left[\frac{\left(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right)\left(e^{x^2} - 15\right) - (x \ln(x))\left(2xe^{x^2}\right)}{\left(e^{x^2} - 15\right)^2}\right]\left[\frac{x \ln(x)}{e^{x^2} - 15}\right]^2$$

$$= 3\left[\frac{(\ln(x) + 1)\left(e^{x^2} - 15\right) - 2x^2 e^{x^2} \ln(x)}{\left(e^{x^2} - 15\right)^2}\right]\left[\frac{x \ln(x)}{e^{x^2} - 15}\right]^2$$

(c) $h(x) = \sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) + 6\pi$

$$h'(x) = \left(\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) + 6\pi\right)' = \left(\sqrt{x} \sin(\sqrt{x})\right)'$$

$$\Rightarrow h'(x) = (\sqrt{x})' \sin(\sqrt{x}) + \sqrt{x}\, (\sqrt{x})' \cos(\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x}) + \cancel{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\cancel{\sqrt{x}}} \cos(\sqrt{x})$$

$$= \frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \frac{\cos(\sqrt{x})}{2}$$

Question 3. [6 points] **Sans utiliser les tableaux de valeurs**, calculer les limites suivantes

$\frac{0}{0}$ (a) $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{3x^2-7x-6}$ $= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)}{3\left(x^2-\frac{7}{3}x-6\right)}$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}}{3\cancel{(x-3)}\left(x+\frac{2}{3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{1}{(3x+2)} = \frac{1}{11}$$

$\infty - \infty$ (b) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{-3x^2+x} - \frac{1}{x}\right)$ $= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cancel{x} + 3x^2 - \cancel{x}}{x(-3x^2+x)}\right)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(-3x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3}{-3x+1} = 3$$

(c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{25x^4+5}}$ $= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^4}{25x^4+5}}$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{\frac{25x^4}{x^4}+\frac{5}{x^4}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{25+\frac{5}{x^4}}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$$

$\frac{5}{x^4} \to 0$

Question 4. [4 points] Soit la fonction définie par partie suivante:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-7|}{x^2-49} & \text{si} \quad x \neq 7 \\ x - c & \text{si} \quad x = 7. \end{cases}$$

Existe-t-il une constante c telle que la fonction $f(x)$ soit continue en $x = 7$? Justifier votre réponse

$$|x-7| = \begin{cases} x-7 & \text{si } x \geq 7 \\ -(x-7) & \text{si } x < 7 \end{cases}$$

$$* \lim_{x \to 7^+} f(x) = \lim_{x \to 7^+} \frac{\cancel{(x-7)}}{\cancel{(x-7)}(x+7)} = \frac{1}{14}$$

$$* \lim_{x \to 7^-} f(x) = \lim_{x \to 7^-} \frac{-\cancel{(x-7)}}{\cancel{(x-7)}(x+7)} = -\frac{1}{14}$$

$\lim_{x \to 7^+} f(x) \neq \lim_{x \to 7^-} f(x)$ ce qui implique que la fonction $f(x)$ n'est pas continue en $x = 7$.

Ainsi, il n'existe aucune constante c telle que la fonction $f(x)$ soit continue au point $x = 7$.

Question 5. [4 points] Utiliser la différentiation implicite pour déterminer $y' = dy/dx$ dans l'équation suivante

$$e^{3xy} = y^3$$

On derivé les deux membres de $e^{3xy} = y^3$ par rapport à x

$$\left(e^{3xy}\right)' = \left(y^3\right)'$$

$$(3xy)'\, e^{3xy} = 3y'y^2$$

$$\cancel{3}(y + xy')\, e^{3xy} = \cancel{3}y'y^2$$

$$y\,e^{3xy} + xy'e^{3xy} = y'y^2$$

$$y'y^2 - xy'e^{3xy} = y\,e^{3xy}$$

$$y'\left(y^2 - x e^{3xy}\right) = y\,e^{3xy}$$

$$y' = \frac{y\,e^{3xy}}{y^2 - x e^{3xy}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{y\,e^{3xy}}{y^2 - x e^{3xy}}}$$

Question 6. [6 points] Pour rendre les oiseaux heureux, Monique dépose β grammes de graines de tournesol au début de chaque semaine dans un endroit bien en vue. Durant la semaine, les oiseaux mangent 1/5 des graines disponibles. Ce qui fait que le système dynamique modélisant la quantité des graines disponibles est:

$$x_{n+1} = 0.8x_n + \beta$$

où n mesure le nombre de semaines.

(a) [1 point] La fonction itérative du SDD est $f(x) =$ $\boxed{0{,}8x + \beta}$

(b) [1 point] Le point d'équilibre du SDD est $x^* =$ $\boxed{\frac{\beta}{0.2}}$

Le SDD est linéaire car $f(x) = \alpha x + \beta$ où $\alpha = 0.4 \neq 1$

Le point fixe pour ce SDD linéaire est

$$x^* = \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{\beta}{1-0.8} = \frac{\beta}{0.2}$$

(c) [2 points] Supposons que la quantité déposée chaque semaine est $\beta = 20$. Déterminer la solution générale de ce système.

$$x_n = \boxed{\alpha^n (x_0 - x^*) + x^* = (0.8)^n \left(x_0 - \frac{20}{0.2}\right) + \frac{20}{0.2}}$$

$$x_n = (0.8)^n (x_0 - 100) + 100$$

Cette solution s'applique pour un SDD linéaire lorsque $\alpha \neq 1$.

(d) [1 points] Tracer la fonction itérative et tracer la toile du SDD avec $x_0 = 10$ (quatre itérations suffiront).

On a: $f(x) = 0.8x + 20$ et $x_{n+1} = 0.8x_n + 20$

$x_0 = 10$

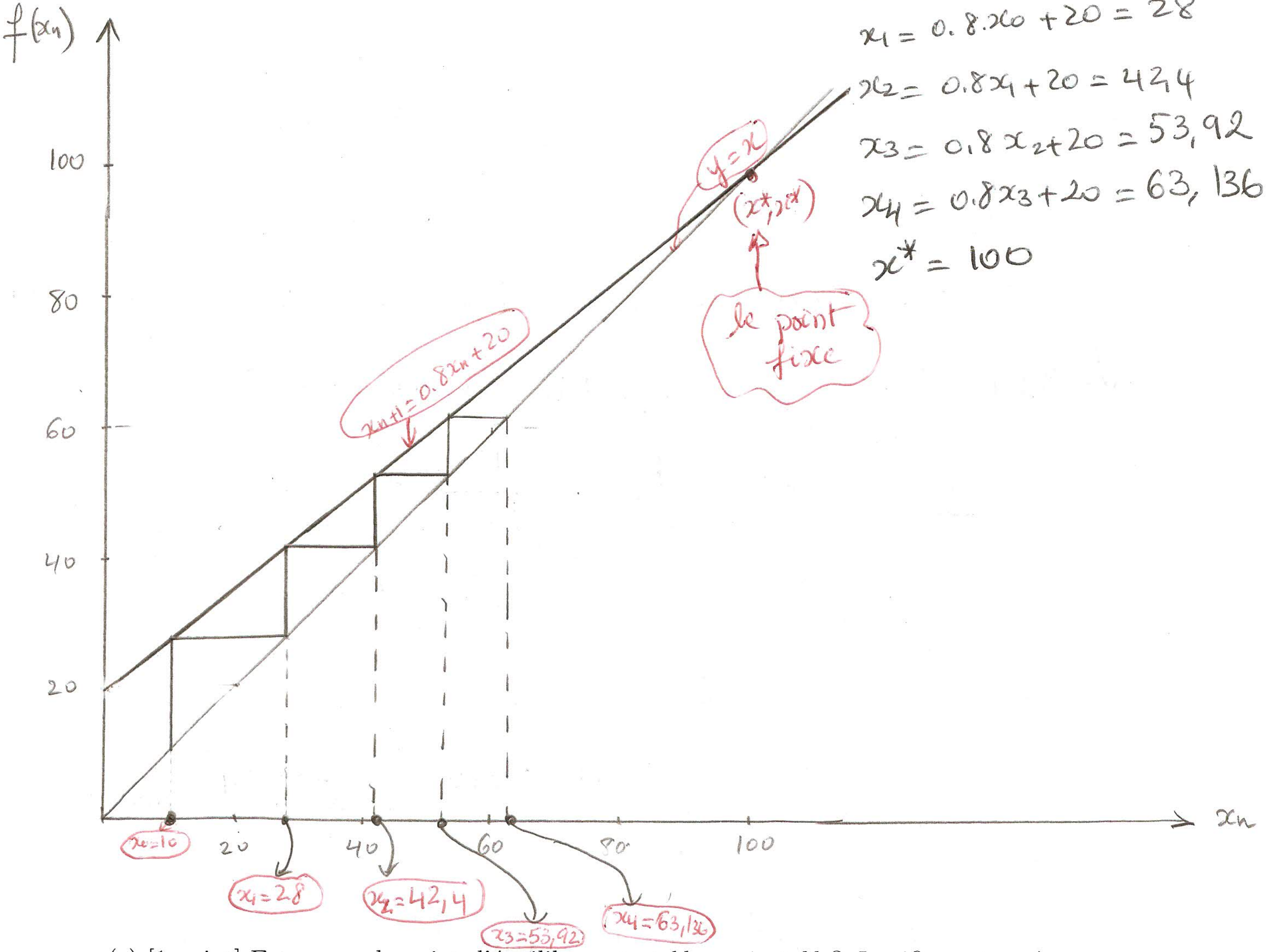
$x_1 = 0.8 \cdot x_0 + 20 = 28$

$x_2 = 0.8x_1 + 20 = 42,4$

$x_3 = 0,8\,x_2 + 20 = 53,92$

$x_4 = 0,8x_3 + 20 = 63,136$

$x^* = 100$



(e) [1 point] Est-ce que le point d'équilibre est *stable* ou *instable*? Justifiez votre réponse.

* Le point d'équilibre est stable car le SDD est linéaire et $|\alpha| = 0.8 < 1$.

* Ou bien on peut remarquer que les orbites zigzaguent vers le point fixe. par la question (d).