

## Logique propositionnelle

### 1. LES PROPOSITIONS ET LES CONNECTIFS

Une *proposition* est une phrase qui est soit vraie, soit fausse.

#### 1.1. Exemples.

- (1) “*Le tableau est noir*” est une proposition puisque cette phrase est soit vraie, soit fausse.
- (2) L’expression mathématique “ $2^5 - 1 = 24$ ” est une proposition, car c’est une affirmation qui est soit vraie, soit fausse (en fait c’est une proposition fausse).
- (3) L’expression mathématique “ $2^5 - 1$ ” n’est pas une proposition. En effet, “ $2^5 - 1$ ” est le nombre 31, et 31 n’est ni vrai ni faux.

Les mots *proposition*, *affirmation*, *assertion* sont synonymes.

Lorsqu’une proposition est vraie, on dit que sa *valeur de vérité* est **V** ; lorsqu’elle est fausse, sa valeur de vérité est **F**.

Les propositions sont souvent représentées par des lettres. Par exemple, on peut écrire :

$$A = \text{“le nombre 6 est pair”}, \quad B = \text{“le nombre 4 est impair”}, \quad C = \text{“}\sqrt[7]{100} < 2\text{”}.$$

Alors la proposition  $A$  est vraie,  $B$  est fausse et  $C$  est vraie.

### LES CINQ CONNECTIFS LOGIQUES

**Connectif de conjonction ( $\wedge$ ).** La formule  $X \wedge Y$  se lit “ $X$  et  $Y$ ”. Le connectif  $\wedge$  est défini par la table suivante, appelée la *table de vérité de  $\wedge$*  :

$X$	$Y$	$X \wedge Y$
<b>V</b>	<b>V</b>	<b>V</b>
<b>V</b>	<b>F</b>	<b>F</b>
<b>F</b>	<b>V</b>	<b>F</b>
<b>F</b>	<b>F</b>	<b>F</b>

1.2. **Exemple.** La phrase “6 est pair et 4 est impair” est fausse, car cette phrase est

$$(6 \text{ est pair}) \wedge (4 \text{ est impair}) = \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{F}$$

(la deuxième ligne de la table ci-dessus nous indique que  $\mathbf{V} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{F}$ ).

**Connectif de disjonction ( $\vee$ ).** La formule  $X \vee Y$  se lit “ $X$  ou  $Y$ ”.

$X$	$Y$	$X \vee Y$
<b>V</b>	<b>V</b>	<b>V</b>
<b>V</b>	<b>F</b>	<b>V</b>
<b>F</b>	<b>V</b>	<b>V</b>
<b>F</b>	<b>F</b>	<b>F</b>

1.3. **Exemple.** La phrase “6 est pair ou 4 est impair” est **vraie**, car cette phrase est

$$(6 \text{ est pair}) \vee (4 \text{ est impair}) = \mathbf{V} \vee \mathbf{F} = \mathbf{V}.$$

**Connectif de négation ( $\neg$ ).** La formule  $\neg X$  se lit “non  $X$ ”.

$X$	$\neg X$
$\mathbf{V}$	$\mathbf{F}$
$\mathbf{F}$	$\mathbf{V}$

Lorsqu’on veut remplacer une formule  $\neg X$  par une phrase française, on peut dire “il est faux que  $X$ ” plutôt que “non  $X$ ”. Par exemple, si  $X$  est la proposition “tout entier impair est divisible par 3”, alors  $\neg X$  est “il est faux que tout entier impair est divisible par 3”. (Dans cet exemple,  $X$  est  $\mathbf{F}$  et  $\neg X$  est  $\mathbf{V}$ .)

**Connectif d’implication ( $\Rightarrow$ ).** La formule  $X \Rightarrow Y$  est appelée une *implication* ; elle se lit “ $X$  implique  $Y$ ”, ou encore “si  $X$  alors  $Y$ ”. On dit que  $X$  est l’*hypothèse* de cette implication et que  $Y$  est sa *conclusion*. L’implication est définie par :

$X$	$Y$	$X \Rightarrow Y$
$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$
$\mathbf{V}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}$
$\mathbf{F}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$
$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{V}$

*Retenir :*

- Le seul cas où l’implication est fautive est celui où l’hypothèse est vraie et la conclusion est fautive.**
- L’implication est vraie à chaque fois que l’hypothèse est fautive.
- L’implication est vraie à chaque fois que la conclusion est vraie.

1.4. **Exemple.** En campagne électorale, un politicien fait la promesse :

*“Si je suis élu, il y aura une réduction d’impôts.”*

Supposons qu’il n’est pas élu et qu’il n’y a pas réduction d’impôts. Alors peut-on l’accuser d’avoir menti ?

Intuitivement, on sait bien qu’il n’a pas menti, puisqu’il n’avait rien promis du tout dans le cas où il ne serait pas élu. Donc notre intuition nous dit que la phrase qu’il a prononcée est vraie (sinon il aurait menti). Cette intuition est en accord avec la table de vérité de  $\Rightarrow$ , puisque la phrase prononcée est une implication du type  $(\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{F})$ , qui est  $\mathbf{V}$  selon la table.

1.5. **Exemple.** La phrase

$$\text{Si } 2^3 = 16 \text{ alors } 1 + 1 = 3$$

est-elle vraie ou fautive ? C’est un autre exemple d’implication du type  $(\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{F})$ , donc cette phrase est vraie.

1.6. **Exemple.** Montrons que l’implication  $x > 1 \Rightarrow x^2 > 3$  est vraie **pour tout**  $x \in \mathbb{Z}$ . En effet, si  $x \in \mathbb{Z}$  alors  $x$  satisfait  $x \leq 1$  ou  $x > 1$ .

- Dans le premier cas ( $x \leq 1$ ), on a une implication avec hypothèse  $\mathbf{F}$ , donc l’implication est  $\mathbf{V}$ .

- Dans le deuxième cas ( $x > 1$ ), on a  $x \geq 2$ , donc  $x^2 \geq 4$ , donc  $x^2 > 3$ , donc on a une implication avec conclusion **V**, donc l'implication est **V**.

Ainsi, l'implication est **V** pour tout  $x \in \mathbb{Z}$ .

### Le connectif biconditionnel ( $\Leftrightarrow$ ).

La formule  $X \Leftrightarrow Y$  se lit “ $X$  si et seulement si  $Y$ ”.

$X$	$Y$	$X \Leftrightarrow Y$
<b>V</b>	<b>V</b>	<b>V</b>
<b>V</b>	<b>F</b>	<b>F</b>
<b>F</b>	<b>V</b>	<b>F</b>
<b>F</b>	<b>F</b>	<b>V</b>

*Retenir :*

- La formule  $X \Leftrightarrow Y$  est vraie lorsque  $X$  et  $Y$  ont la même valeur de vérité (ce qui signifie que  $X$  et  $Y$  sont toutes les deux **V** ou toutes les deux **F**).
- La formule  $X \Leftrightarrow Y$  est fausse lorsque  $X$  et  $Y$  ont des valeurs de vérité différentes.

1.7. **Exercice.** Répondez par **V** ou **F**. (Remarque : on peut résoudre les exercices (6–10) sans savoir si  $17^{231} + 2$  est un nombre premier.)

- (1)  $2^3 = 8$  et  $5 \times 6 = 40$ .
- (2)  $2 + 3 = 6$  ou  $2 + 7 = 9$ .
- (3) Si  $2 + 7 = 9$  alors  $2 + 3 = 9$ .
- (4)  $2 + 7 = 5$  si et seulement si  $2 + 3 = 9$ .
- (5) Si 1027 est un entier positif alors  $1 + 1 = 2$ .
- (6) Si  $17^{231} + 2$  est un nombre premier alors  $3 + 4 = 7$ .
- (7) Si  $3 + 4 = 13$  alors  $17^{231} + 2$  est un nombre premier.
- (8) Si  $17^{231} + 2$  est un nombre premier ou  $3 + 4 = 7$ , alors  $2^5 = 8$ .
- (9) Si  $17^{231} + 2$  est un nombre premier alors  $17^{231} + 2$  est un nombre premier.
- (10) Si ( $17^{231} + 2$  est un nombre premier si et seulement si  $1 + 1 = 2$ ), alors  $17^{231} + 2$  est un nombre premier.

1.8. Dans une formule telle que  $(X \wedge Z) \Rightarrow \neg(X \wedge Y)$ , les lettres  $X, Y, Z$  sont appelées des *variables propositionnelles*. Chacune de ces variables peut prendre deux valeurs : **V** ou **F**. Une fois qu'on a choisi une valeur pour chaque variable, la formule toute entière acquiert une valeur **V** ou **F**.

1.9. **Exemple.** Si  $X = \mathbf{V}$ ,  $Y = \mathbf{V}$  et  $Z = \mathbf{F}$ , quelle est la valeur de vérité de la formule  $(X \wedge Z) \Rightarrow \neg(X \wedge Y)$  ? Voici comment calculer cette valeur, en utilisant les tables de vérité des connectifs :

$$\begin{aligned}
 (X \wedge Z) &\Rightarrow \neg(X \wedge Y) \\
 (\mathbf{V} \wedge \mathbf{F}) &\Rightarrow \neg(\mathbf{V} \wedge \mathbf{V}) \\
 \mathbf{F} &\Rightarrow \neg \mathbf{V} \\
 \mathbf{F} &\Rightarrow \mathbf{F} \\
 &\mathbf{V}
 \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque  $(X, Y, Z) = (\mathbf{V}, \mathbf{V}, \mathbf{F})$ , la formule  $(X \wedge Z) \Rightarrow \neg(X \wedge Y)$  est  $\mathbf{V}$ . On vient de calculer la deuxième ligne de la table suivante :

$X$	$Y$	$Z$	$(X \wedge Z) \Rightarrow \neg(X \wedge Y)$
$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{F}$
$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{V}$
$\mathbf{V}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$
$\mathbf{V}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{V}$
$\mathbf{F}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$
$\mathbf{F}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{V}$
$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$
$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{V}$

La table ci-dessus est la *table de vérité* de  $(X \wedge Z) \Rightarrow \neg(X \wedge Y)$ . Toute formule a une table de vérité.

1.10. **Exercice.** Dans chaque cas, trouvez toutes les valeurs de  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$  pour lesquelles la formule donnée est  $\mathbf{F}$ .

- (1)  $X_1 \Rightarrow (X_2 \Rightarrow (X_3 \Rightarrow (X_4 \Rightarrow X_5)))$
- (2)  $X_1 \Rightarrow (X_2 \Rightarrow (X_3 \Rightarrow (X_4 \Rightarrow (X_5 \Rightarrow X_1))))$
- (3)  $X_1 \Rightarrow [(X_2 \Rightarrow X_3) \vee (X_4 \Rightarrow X_5)]$

### L'ÎLE DES CHEVALIERS ET DES COQUINS (EXERCICES)

Il existe une île fort peu connue, appelée l'île des chevaliers et des coquins, dont les habitants se comportent de la manière suivante :

- chaque habitant de l'île est soit un chevalier, soit un coquin;
- un chevalier dit *toujours* la vérité;
- un coquin ne dit *jamais* la vérité.

Dans chaque exercice, vous vous promenez sur l'île des chevaliers et des coquins et vous rencontrez des habitants. En écoutant ce qu'ils disent, vous pouvez peut-être déterminer le type de ces habitants (le type est soit chevalier, soit coquin) ou tirer d'autres conséquences. Les solutions des deux premiers problèmes sont fournies. *Remarque:* Les livres de Raymond Smullyan contiennent beaucoup de problèmes de ce type.

- (1) Vous rencontrez deux habitants, A et B. L'habitant A dit: *Je suis coquin, ou mon ami est chevalier*. Pouvez-vous déterminer les types de A et B?

*Solution.* La phrase prononcée par A est  $X \vee Y$ , où:

$$X = \text{“}A \text{ est coquin”}, \quad Y = \text{“}B \text{ est chevalier”}.$$

Nous allons d'abord prouver que A est chevalier :

Supposons que A est coquin.

Alors la phrase  $X$  est vraie, donc  $X \vee Y$  est aussi vraie, donc le coquin A a prononcé une phrase vraie, ce qui est impossible.

L'argument encadré montre que l'hypothèse “A est coquin” a une conséquence impossible. Il est donc impossible que A soit coquin.

On a prouvé que **A est chevalier**.

La phrase  $X \vee Y$  doit donc être vraie, puisqu'elle a été prononcée par un chevalier. Puisque  $X$  est **F** et  $X \vee Y$  est **V**, la table de vérité de  $\vee$  nous indique que  $Y$  doit être vraie, donc **B est chevalier**.

Ainsi, A et B sont deux chevaliers. □

- (2) Selon une rumeur, il y a de l'or caché dans l'île des chevaliers et coquins. Vous demandez à un habitant de l'île si cette rumeur est vraie. Il vous répond: *Il y a de l'or si et seulement si je suis un chevalier*. (a) Pouvez-vous déterminer s'il y a de l'or sur l'île? (b) Pouvez-vous déterminer le type de l'habitant?

*Solution.* Disons que cet habitant se nomme "A". La phrase prononcée par A est

$$O \Leftrightarrow H,$$

où:

$$O = \text{"Il y a de l'or sur l'île"}, \quad H = \text{"A est chevalier"}.$$

On sait que A est un chevalier ou un coquin.

- Si A est chevalier alors la phrase  $O \Leftrightarrow H$  est **V**, puisqu'elle a été prononcée par un chevalier; donc  $O$  et  $H$  ont la même valeur de vérité. Puisque  $H$  est **V**, il s'ensuit donc que  $O$  est **V**. Donc, il y a de l'or (si A est chevalier).
- Si A est coquin alors la phrase  $O \Leftrightarrow H$  est **F**, puisqu'elle a été prononcée par un coquin; donc  $O$  et  $H$  ont des valeurs de vérité différentes. Puisque  $H$  est **F**, il s'ensuit donc que  $O$  est **V**. Donc, il y a de l'or (si A est coquin).

On a montré qu'il y a de l'or dans chacun des deux cas possibles, donc **il y a de l'or**. Cependant, il n'y a aucun moyen de savoir si l'habitant est chevalier ou coquin. □

- (3) Vous rencontrez deux habitants de l'île, A et B, et A dit: *Au moins un de nous deux est un coquin*. Quels sont les types de A et B?
- (4) Vous rencontrez deux habitants de l'île, A et B, et A dit: *Si je suis chevalier, alors mon ami aussi est chevalier*. Quels sont les types de A et B?
- (5) Un habitant de l'île vous dit: *Si je suis chevalier, alors je mangerai mon chapeau!* Pouvez-vous déterminer si cet habitant mangera son chapeau? Pouvez-vous déterminer le type de cet habitant?
- (6) Sur l'île des chevaliers et des coquins, un procès a lieu. Voici les témoignages de l'accusé B et de son avocat A:

**A:** *Mon client est un coquin mais il est innocent.*

**B:** *Mon avocat est un chevalier.*

Pouvez-vous déterminer les types de A et B? Pouvez-vous décider si B est innocent ou coupable? (Remarque: dans la phrase prononcée par A, le mot "mais" peut être remplacé par "et".)

- (7) Sur l'île des chevaliers et des coquins, les habitants A et B ont dit:

**A:** *Au moins un de nous deux est un coquin, et cette île est l'île de Maya.*

**B:** *Ce qu'a dit A est vrai.*

Pouvez-vous dire si cette île est l'île de Maya? Pouvez-vous déterminer les types de A et B?

- (8) Sur l'île des chevaliers et des coquins, les habitants A et B ont dit:

**A:** *Au moins un de nous deux est un coquin, ou cette île est l'île de Maya.*

**B:** *Ce qu'a dit A est vrai.*

Pouvez-vous dire si cette île est l'île de Maya? Pouvez-vous déterminer les types de A et B?

## 2. DÉFINITION DES FORMULES DE LA LOGIQUE PROPOSITIONNELLE

Jusqu'ici nous avons travaillé avec des formules logiques sans avoir défini ce qu'est une formule. Il est temps de donner une définition.

Voir 1.8 et 1.9 pour la notion de variable propositionnelle. Nous adoptons la convention suivante :

**2.1. Définition de variable propositionnelle.** Les variables propositionnelles sont les lettres majuscules  $A, B, \dots, Z$  ainsi que les lettres majuscules indicées par des nombres naturels (par exemple  $B_0, B_1, B_2$ ).

**2.2. Définition de l'alphabet.** *L'alphabet* est l'ensemble des symboles suivants :

- les variables propositionnelles,
- les symboles  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{F}$ ,
- les connectifs  $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow,$
- les parenthèses  $(, ), (, ), \left(, \right), [, ], [ , ], \left[ , \right]$ .

L'alphabet est l'ensemble de tous les symboles dont nous avons besoin pour écrire les formules. Parmi les éléments de l'alphabet, nous retrouvons les symboles  $V, \mathbf{V}, F, \mathbf{F}$ , où  $V$  et  $F$  sont des variables propositionnelles et  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{F}$  sont les valeurs de vérité.

**2.3. Définition de mot.** Un *mot* est une suite finie de symboles provenant de l'alphabet.

Par exemple,  $((X \wedge Y) \Rightarrow \neg(X \Leftrightarrow Y))$  et  $\wedge X) \neg \Rightarrow YY$  sont deux mots. On peut maintenant définir ce qu'est une *formule de logique propositionnelle* :

**2.4. Définition des formules.** Une *formule* est un mot qui peut être construit en respectant les règles suivantes :

- (1) Chaque variable propositionnelle est une formule ;  
les symboles  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{F}$  sont des formules.
- (2) Si  $\varphi$  est une formule, alors  $\neg\varphi$  est une formule.
- (3) Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont des formules, alors
  - (3.1)  $(\varphi \wedge \psi)$  est une formule,
  - (3.2)  $(\varphi \vee \psi)$  est une formule,
  - (3.3)  $(\varphi \Rightarrow \psi)$  est une formule,
  - (3.4)  $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$  est une formule.

Les formules données par la règle (1) sont appelées des *formules atomiques*, ou tout simplement des *atomes*. Par exemple,  $A, A_1, V, \mathbf{V}, F, F_4, \mathbf{F}, B, B_{13}, E_0, \dots$  sont des formules atomiques. Les formules qui ne sont pas atomiques sont précisément celles qui contiennent un ou plusieurs connectifs; elles sont appelées des *formules complexes*.

*Remarque.* En pratique, on évitera d'écrire des formules contenant les variables propositionnelles  $V$  et  $F$ , à cause du danger de confusion avec  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{F}$ . Cependant, nous continuerons à écrire des formules contenant  $\mathbf{V}$  ou  $\mathbf{F}$ ; par exemple, nous pouvons travailler avec la formule  $(X \Rightarrow \mathbf{F})$ .

2.5. **Exemple.** En vertu de la règle (1), on sait que  $X$  et  $Y$  sont deux formules. Donc la règle (3.1) nous permet d'affirmer que le mot  $(X \wedge Y)$  est une formule. Remarquez que cette règle nous force à introduire des parenthèses. Autrement dit, le mot  $X \wedge Y$  n'est pas une formule, car il ne peut pas être construit en respectant les règles de 2.4.

2.6. **Exemple.**

		Justification	
(*)	1	$X, Y, Z$ sont trois formules	règle (1)
	2	$(X \wedge Y)$ est une formule	ligne 1 et règle (3.1)
	3	$\neg Z$ est une formule	ligne 1 et règle (2)
	4	$\neg(X \wedge Y)$ est une formule	ligne 2 et règle (2)
	5	$(\neg Z \Rightarrow \neg(X \wedge Y))$ est une formule	lignes 3 et 4 et règle (3.3)

Ainsi, les règles de 2.4 nous ont permis de construire la formule  $(\neg Z \Rightarrow \neg(X \wedge Y))$ . Autrement dit, nous pouvons affirmer que  $(\neg Z \Rightarrow \neg(X \wedge Y))$  est une formule, et le tableau (\*) est la preuve de cette affirmation.

2.7. **Exercice.** Prouvez que  $((\neg \neg X \wedge Y) \Leftrightarrow \neg(X \wedge Y))$  est une formule en utilisant un tableau semblable à (\*). Prouvez aussi que  $(X \vee \neg \mathbf{F})$  et  $\neg \neg \mathbf{V}$  sont des formules. Essayez de construire  $((X \wedge Y))$  en respectant les règles de 2.4; vous verrez que c'est impossible, donc le mot  $((X \wedge Y))$  n'est pas une formule.

2.8. Les règles de 2.4 sont très strictes:

- On a vu que  $(X \wedge Y)$  est une formule mais que ni  $X \wedge Y$  ni  $((X \wedge Y))$  n'en sont.
- Similairement,  $\neg Z$  est une formule mais ni  $(\neg Z)$  ni  $\neg(Z)$  ne sont des formules.
- $\neg \neg X$  est une formule mais  $\neg(\neg X)$  n'en n'est pas une.

*Remarque.* Il est permis d'utiliser différents types de parenthèses. Ainsi,

$$(A \vee [(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)])$$

est une formule toute aussi valable que

$$(A \vee ((A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C))),$$

et est beaucoup plus lisible.

## CONNECTIF PRINCIPAL

Considérons la formule  $(\neg Z \Rightarrow \neg(X \wedge Y))$  qu'on a construite en 2.6, au moyen du tableau (\*). La dernière ligne de ce tableau nous apprend que  $\Rightarrow$  est le dernier connectif à être introduit dans la formule. On l'appelle le *connectif principal* de  $(\neg Z \Rightarrow \neg(X \wedge Y))$ . Les formules  $\neg Z$  et  $\neg(X \wedge Y)$  sont appelées les *composantes principales* de la formule  $(\neg Z \Rightarrow \neg(X \wedge Y))$ .

Chaque formule complexe possède exactement un connectif principal, et ce connectif détermine soit une soit deux composantes principales (une si le connectif principal est  $\neg$  et deux dans les autres cas). Remarquez que chaque composante principale est elle-même une formule. Exemples :

formule	connectif principal	composantes principales	
$(\neg Z \Rightarrow \neg(X \wedge Y))$	$\Rightarrow$	$\neg Z$	$\neg(X \wedge Y)$
$((X \vee Y) \wedge Z)$	$\wedge$	$(X \vee Y)$	$Z$
$(X \vee (Y \wedge Z))$	$\vee$	$X$	$(Y \wedge Z)$
$\neg(X \vee (Y \wedge Z))$	$\neg$	$(X \vee (Y \wedge Z))$	

## 3. ÉQUIVALENCE DE FORMULES

Avant de définir l'équivalence des formules, rappelons que toute formule a une table de vérité. Par exemple, si on veut construire la table de vérité de  $[(X \wedge Z) \Rightarrow \neg(X \wedge Y)]$ , on remplit la table suivante:

$X$	$Y$	$Z$	$(X \wedge Y)$	$(X \wedge Z)$	$\neg(X \wedge Y)$	$[(X \wedge Z) \Rightarrow \neg(X \wedge Y)]$
V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	F	V	V

Dans cette table, les colonnes de  $(X \wedge Y)$ ,  $(X \wedge Z)$  et  $\neg(X \wedge Y)$  ne font pas vraiment partie de la table de vérité de  $[(X \wedge Z) \Rightarrow \neg(X \wedge Y)]$ ; elles ne servent qu'à nous faciliter le calcul de la dernière colonne. En fait, la table de vérité de  $[(X \wedge Z) \Rightarrow \neg(X \wedge Y)]$  est:

$X$	$Y$	$Z$	$[(X \wedge Z) \Rightarrow \neg(X \wedge Y)]$
V	V	V	F
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	V

**3.1. Définition.** Deux formules sont *équivalentes* si elles ont la même table de vérité. Pour indiquer que des formules  $\varphi$  et  $\psi$  sont équivalentes, on écrit  $\varphi \equiv \psi$ .

**3.2. Exemple.** Les formules  $(X \Rightarrow Y)$  et  $(\neg X \vee Y)$  sont-elles équivalentes? On constate facilement que ces formules ont la même table de vérité:

$X$	$Y$	$(X \Rightarrow Y)$	$X$	$Y$	$(\neg X \vee Y)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V

donc les formules sont équivalentes:  $(X \Rightarrow Y) \equiv (\neg X \vee Y)$ .

**3.3. Exemple.** Les tables

$X$	$Y$	$\neg(X \Rightarrow Y)$	$X$	$Y$	$(X \wedge \neg Y)$
V	V	F	V	V	F
V	F	V	V	F	V
F	V	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F

montrent que  $\neg(X \Rightarrow Y) \equiv (X \wedge \neg Y)$ . C'est une équivalence importante, que vous devez connaître.

3.4. **Exemple.** Les tables

$X$	$\neg\neg X$
<b>V</b>	<b>V</b>
<b>F</b>	<b>F</b>

$X$	$X$
<b>V</b>	<b>V</b>
<b>F</b>	<b>F</b>

montrent que  $\neg\neg X \equiv X$ .

3.5. **Exemple.** On se demande si les formules  $[(X \vee \neg X) \wedge Y]$  et  $Y$  sont équivalentes. À première vue on pourrait penser que non, car les tables

$X$	$Y$	$[(X \vee \neg X) \wedge Y]$
<b>V</b>	<b>V</b>	<b>V</b>
<b>V</b>	<b>F</b>	<b>F</b>
<b>F</b>	<b>V</b>	<b>V</b>
<b>F</b>	<b>F</b>	<b>F</b>

et

$Y$	$Y$
<b>V</b>	<b>V</b>
<b>F</b>	<b>F</b>

ne sont pas identiques. Ici on s'aperçoit que la définition 3.1 d'équivalence n'est pas assez précise pour répondre à notre question. Apportons la précision nécessaire :

**Définition.** Soient  $\varphi$  et  $\psi$  des formules. Soit  $E$  l'ensemble des variables propositionnelles qui apparaissent dans  $\varphi$  ou  $\psi$  (donc  $E$  contient toutes les variables propositionnelles de  $\varphi$  ainsi que toutes celles de  $\psi$ ). Alors  $\varphi$  et  $\psi$  sont *équivalentes* si les tables de vérité de  $\varphi$  et  $\psi$  relativement à  $E$  sont identiques.

3.6. **Exemple.** Les formules  $(X \Rightarrow (X \vee Y))$  et  $(X \Rightarrow (X \vee Z))$  sont-elles équivalentes ? Ici on doit prendre l'ensemble  $E = \{X, Y, Z\}$ , et construire les deux tables de vérité relativement au même ensemble  $E$  :

$X$	$Y$	$Z$	$(X \Rightarrow (X \vee Y))$
<b>V</b>	<b>V</b>	<b>V</b>	<b>V</b>
<b>V</b>	<b>V</b>	<b>F</b>	<b>V</b>
<b>V</b>	<b>F</b>	<b>V</b>	<b>V</b>
<b>V</b>	<b>F</b>	<b>F</b>	<b>V</b>
<b>F</b>	<b>V</b>	<b>V</b>	<b>V</b>
<b>F</b>	<b>V</b>	<b>F</b>	<b>V</b>
<b>F</b>	<b>F</b>	<b>V</b>	<b>V</b>
<b>F</b>	<b>F</b>	<b>F</b>	<b>V</b>

$X$	$Y$	$Z$	$(X \Rightarrow (X \vee Z))$
<b>V</b>	<b>V</b>	<b>V</b>	<b>V</b>
<b>V</b>	<b>V</b>	<b>F</b>	<b>V</b>
<b>V</b>	<b>F</b>	<b>V</b>	<b>V</b>
<b>V</b>	<b>F</b>	<b>F</b>	<b>V</b>
<b>F</b>	<b>V</b>	<b>V</b>	<b>V</b>
<b>F</b>	<b>V</b>	<b>F</b>	<b>V</b>
<b>F</b>	<b>F</b>	<b>V</b>	<b>V</b>
<b>F</b>	<b>F</b>	<b>F</b>	<b>V</b>

Puisque ces tables sont identiques, on conclut que  $(X \Rightarrow (X \vee Y)) \equiv (X \Rightarrow (X \vee Z))$ .

3.7. **Exemple.** Revenons à l'exemple 3.5, qu'on a laissé inachevé. On construit les deux tables relativement à  $E = \{X, Y\}$  :

$X$	$Y$	$[(X \vee \neg X) \wedge Y]$
<b>V</b>	<b>V</b>	<b>V</b>
<b>V</b>	<b>F</b>	<b>F</b>
<b>F</b>	<b>V</b>	<b>V</b>
<b>F</b>	<b>F</b>	<b>F</b>

$X$	$Y$	$Y$
<b>V</b>	<b>V</b>	<b>V</b>
<b>V</b>	<b>F</b>	<b>F</b>
<b>F</b>	<b>V</b>	<b>V</b>
<b>F</b>	<b>F</b>	<b>F</b>

Ces tables montrent que  $[(X \vee \neg X) \wedge Y] \equiv Y$ .

3.8. **Exemple.** Les formules  $(X \Rightarrow (Y \vee \neg Y))$  et **V** sont-elles équivalentes ? On considère les deux tables relativement à l'ensemble  $E = \{X, Y\}$  :

$X$	$Y$	$(X \Rightarrow (Y \vee \neg Y))$	$X$	$Y$	$\mathbf{V}$
$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$
$\mathbf{V}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{V}$
$\mathbf{F}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}$
$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{V}$

Ces tables sont identiques, donc les formules sont équivalentes:  $(X \Rightarrow (Y \vee \neg Y)) \equiv \mathbf{V}$ .

3.9. **Exercice.** En vous servant des tables de vérité, montrez les équivalences suivantes:

$\neg(X \vee Y) \equiv (\neg X \wedge \neg Y)$	<i>Loi de De Morgan</i>
$\neg(X \wedge Y) \equiv (\neg X \vee \neg Y)$	<i>Loi de De Morgan</i>
$(X \wedge Y) \equiv (Y \wedge X)$	<i>Commutativité de <math>\wedge</math></i>
$(X \vee Y) \equiv (Y \vee X)$	<i>Commutativité de <math>\vee</math></i>
$[(X \wedge Y) \wedge Z] \equiv [X \wedge (Y \wedge Z)]$	<i>Associativité de <math>\wedge</math></i>
$[(X \vee Y) \vee Z] \equiv [X \vee (Y \vee Z)]$	<i>Associativité de <math>\vee</math></i>
$[X \wedge (Y \vee Z)] \equiv [(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)]$	<i>Distributivité de <math>\wedge</math> sur <math>\vee</math></i>
$[X \vee (Y \wedge Z)] \equiv [(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)]$	<i>Distributivité de <math>\vee</math> sur <math>\wedge</math></i>
$(X \Rightarrow Y) \equiv (\neg Y \Rightarrow \neg X)$	<i>Implication équivalente à sa contraposée</i>
$(X \Leftrightarrow Y) \equiv [(X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)]$	<i>Biconditionnelle équivalente à deux implications</i>

#### 4. OMISSION DE CERTAINES PARENTHÈSES

Si on omet les parenthèses de la formule  $(X \wedge Y)$ , on obtient le mot  $X \wedge Y$  qui n'est pas une formule; nous dirons que  $X \wedge Y$  est une *abréviation* de la formule  $(X \wedge Y)$ . Ce que nous venons de faire est un exemple du procédé suivant :

**Omission des parenthèses externes.** *Si une formule  $\varphi$  commence par “(” et se termine par “)” alors on peut enlever ces parenthèses. On obtient alors une abréviation de  $\varphi$ .*

Voici quelques exemples:

Formule $\varphi$	Abréviation de $\varphi$
$(X \vee Y)$	$X \vee Y$
$(X \Rightarrow Y)$	$X \Rightarrow Y$
$(X \Leftrightarrow Y)$	$X \Leftrightarrow Y$
$(X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z))$	$X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)$
$(\neg Z \Rightarrow \neg(X \wedge Y))$	$\neg Z \Rightarrow \neg(X \wedge Y)$
$((X \wedge Y) \vee (Y \wedge Z))$	$(X \wedge Y) \vee (Y \wedge Z)$
$(\neg X \Rightarrow Y)$	$\neg X \Rightarrow Y$

Remarquez que les abréviations de formules ne sont pas des formules selon la définition 2.4. Cependant, nous ferons comme si elles étaient des formules. Nous dirons par exemple que les formules  $X \Rightarrow Y$  et  $\neg X \vee Y$  sont équivalentes (alors que ce ne sont pas des formules). Donc nous laissons tomber un peu de rigueur au profit de la commodité.

#### Prudence !

- L'opération qui consiste à enlever les parenthèses externes d'une *formule* ne peut pas être appliquée à une *abréviation de formule*. Par exemple,  $((X \wedge Y) \vee (Y \wedge Z))$  est une

formule, donc  $(X \wedge Y) \vee (Y \wedge Z)$  est une abbréviatiion de formule; cette abbréviatiion commence par “(” et se termine par “)”, mais si on enlève ces parenthèses on obtient une expression qui n’a aucun sens:  $X \wedge Y) \vee (Y \wedge Z$

- On peut enlever les parenthèses de la formule  $(\neg X \Rightarrow Y)$  pour obtenir l’abbréviatiion  $\neg X \Rightarrow Y$ , mais on ne peut pas enlever les parenthèses de  $\neg(X \Rightarrow Y)$  pour obtenir  $\neg X \Rightarrow Y$ . En effet, la formule  $\neg(X \Rightarrow Y)$  ne commence pas par “(” et l’omission des parenthèses est interdite.

### Omission de certaines parenthèses internes.

Pourquoi l’expression  $8 \div 4 \div 2$  est-elle ambiguë, tandis que  $8 + 4 + 2$  ne l’est pas ? L’ambiguïté de  $8 \div 4 \div 2$  vient du fait que cette expression peut être interprétée de deux manières :  $(8 \div 4) \div 2 = 2 \div 2 = 1$ , ou  $8 \div (4 \div 2) = 8 \div 2 = 4$ . Autrement dit, on ne sait pas si  $8 \div 4 \div 2$  est égal à 1 ou à 4. Dans le cas de  $8 + 4 + 2$ , les deux interprétations donnent le même résultat :  $(8 + 4) + 2 = 14$  et  $8 + (4 + 2) = 14$ , donc on sait que  $8 + 4 + 2$  est égal à 14 et il n’y a pas d’ambiguïté. En résumé, il est permis d’écrire  $8 + 4 + 2$  sans parenthèses parce que l’addition est une opération associative :  $(a + b) + c = a + (b + c)$  quels que soient  $a, b, c$ . Mais la division n’est pas associative, donc on doit écrire soit  $(8 \div 4) \div 2$ , soit  $8 \div (4 \div 2)$ .

Le connectif  $\wedge$  est associatif, ce qui signifie que  $(X \wedge Y) \wedge Z \equiv X \wedge (Y \wedge Z)$ . Ceci nous donne le droit d’écrire  $X \wedge Y \wedge Z$  sans parenthèses. On peut aussi écrire  $T \wedge X \wedge Y \wedge Z$  sans parenthèses, parce que les cinq formules

$$(T \wedge X) \wedge (Y \wedge Z), \quad [(T \wedge X) \wedge Y] \wedge Z, \quad [T \wedge (X \wedge Y)] \wedge Z, \quad T \wedge [(X \wedge Y) \wedge Z], \quad T \wedge [X \wedge (Y \wedge Z)]$$

sont toutes équivalentes. Les connectifs  $\vee$  et  $\Leftrightarrow$  sont eux aussi associatifs, donc on peut écrire  $X \vee Y \vee Z$  et  $X \Leftrightarrow Y \Leftrightarrow Z$  sans parenthèses. De plus, le fait que  $\vee$  soit associatif nous permet d’écrire  $(X \Rightarrow Y) \vee (X \Leftrightarrow Z) \vee (X \wedge Y) \vee (Y \wedge Z)$ , et puisque  $\Leftrightarrow$  est associatif on peut écrire  $(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (X \Leftrightarrow Z) \Leftrightarrow (X \wedge Y) \Leftrightarrow (Y \wedge Z)$ .

Par contre,  $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow Z \not\equiv X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)$ , donc  $\Rightarrow$  n’est pas associatif et les parenthèses sont obligatoires : il n’est pas permis d’écrire  $X \Rightarrow Y \Rightarrow Z$ .

Remarquez aussi qu’il n’est pas permis d’écrire  $X \vee Y \wedge Z$  ; il faut écrire soit  $(X \vee Y) \wedge Z$ , soit  $X \vee (Y \wedge Z)$ .

## 5. PREUVES PAR “MANIPULATIONS ALGÈBRIQUES”

Voici une liste d'équivalences très utiles :

	Équivalence	Nom ou commentaire
(1)	$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	
(2)	$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	
(3)	$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	
(4)	$P \vee \neg P \equiv \mathbf{V}$	Tiers exclu
(5)	$P \wedge \neg P \equiv \mathbf{F}$	Contradiction
(6)	$P \vee \mathbf{F} \equiv P$	$\mathbf{F}$ est neutre pour $\vee$
(7)	$P \wedge \mathbf{V} \equiv P$	$\mathbf{V}$ est neutre pour $\wedge$
(8)	$P \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$	$\mathbf{V}$ est “absorbant” pour $\vee$
(9)	$P \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	$\mathbf{F}$ est “absorbant” pour $\wedge$
(10)	$P \vee P \equiv P$	Idempotence
(11)	$P \wedge P \equiv P$	Idempotence
(12)	$\neg \neg P \equiv P$	Double négation
(13)	$P \vee Q \equiv Q \vee P$	Commutativité de $\vee$
(14)	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	Commutativité de $\wedge$
(15)	$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$	Associativité de $\vee$
(16)	$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$	Associativité de $\wedge$
(17)	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	Distributivité de $\vee$ sur $\wedge$
(18)	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	Distributivité de $\wedge$ sur $\vee$
(19)	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	Loi de De Morgan
(20)	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$	Loi de De Morgan

Chacune des équivalences ci-dessus peut être prouvée en utilisant les tables de vérité, comme dans les exemples qu'on a vus.

Nous allons maintenant utiliser une nouvelle méthode pour démontrer des équivalences de formules  $\varphi \equiv \psi$ . Au lieu de vérifier que les deux formules ont la même table de vérité on va plutôt procéder par “manipulations algébriques”, en utilisant des équivalences du tableau ci-dessus.

Voici deux exemples de preuves par manipulations algébriques.

Montrons que  $\neg(X \Rightarrow Y) \equiv (X \wedge \neg Y)$  :

$$\neg(X \Rightarrow Y) \stackrel{(1)}{\equiv} \neg(\neg X \vee Y) \stackrel{(20)}{\equiv} \neg \neg X \wedge \neg Y \stackrel{(12)}{\equiv} X \wedge \neg Y.$$

Voici une preuve que  $X \vee (X \wedge Y) \equiv X$  :

$$X \vee (X \wedge Y) \stackrel{(7)}{\equiv} (X \wedge \mathbf{V}) \vee (X \wedge Y) \stackrel{(18)}{\equiv} X \wedge (\mathbf{V} \vee Y) \stackrel{(13)}{\equiv} X \wedge (Y \vee \mathbf{V}) \stackrel{(8)}{\equiv} X \wedge \mathbf{V} \stackrel{(7)}{\equiv} X.$$

Dans les devoirs ou examens, lorsqu'on vous demande de prouver une équivalence par manipulations algébriques, on vous donne des règles strictes :

- Vous pouvez seulement utiliser les équivalences de la table ci-dessus, et vous devez justifier chaque équivalence en écrivant le numéro correspondant (les numéros qui sont donnés dans la table).
- Vous ne devez sauter AUCUNE étape.
- Vous n'avez pas le droit d'omettre des parenthèses internes.

Prenez garde aux erreurs suivantes.

1. Une erreur fréquente consiste à sauter des étapes sans s'en apercevoir. Par exemple,

$$(\neg X \wedge X) \vee Y \stackrel{(5)}{\equiv} \mathbf{F} \vee Y \stackrel{(6)}{\equiv} Y$$

contient deux erreurs, car deux étapes ont été sautées. La séquence correcte est :

$$(\neg X \wedge X) \vee Y \stackrel{(14)}{\equiv} (X \wedge \neg X) \vee Y \stackrel{(5)}{\equiv} \mathbf{F} \vee Y \stackrel{(13)}{\equiv} Y \vee \mathbf{F} \stackrel{(6)}{\equiv} Y.$$

Voici un autre exemple contenant une erreur :  $\neg(\neg X \wedge Y) \stackrel{(19)}{\equiv} X \vee \neg Y$ . La séquence correcte est

$$\neg(\neg X \wedge Y) \stackrel{(19)}{\equiv} \neg\neg X \vee \neg Y \stackrel{(12)}{\equiv} X \vee \neg Y.$$

Un dernier exemple :  $(X \wedge Y) \vee Z \stackrel{(17)}{\equiv} (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$  n'est pas correct. La séquence correcte est

$$(X \wedge Y) \vee Z \stackrel{(13)}{\equiv} Z \vee (X \wedge Y) \stackrel{(17)}{\equiv} (Z \vee X) \wedge (Z \vee Y) \stackrel{(13)}{\equiv} (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z).$$

2. Vous n'avez pas le droit d'omettre de parenthèses internes. En effet, les équivalences énoncées dans le tableau ne s'appliquent pas à des formules auxquelles on aurait enlevé des parenthèses. Par exemple,

$$P \wedge ((X \vee Y) \vee Z) \equiv P \wedge (X \vee Y \vee Z) \stackrel{(18)}{\equiv} (P \wedge X) \vee (P \wedge Y) \vee (P \wedge Z)$$

n'est pas acceptable, car aucune équivalence du tableau ne permet de faire  $((X \vee Y) \vee Z) \equiv (X \vee Y \vee Z)$ , et (18) ne dit pas que  $P \wedge (X \vee Y \vee Z) \equiv (P \wedge X) \vee (P \wedge Y) \vee (P \wedge Z)$ . Voici une séquence correcte :

$$P \wedge ((X \vee Y) \vee Z) \stackrel{(18)}{\equiv} [P \wedge (X \vee Y)] \vee (P \wedge Z) \stackrel{(18)}{\equiv} [(P \wedge X) \vee (P \wedge Y)] \vee (P \wedge Z)$$

5.1. **Exercice.** Prouvez les équivalences suivantes par manipulations algébriques :

- (1)  $A \vee [B \vee (C \vee D)] \equiv B \vee [C \vee (A \vee D)]$
- (2)  $((X \Rightarrow Y) \Rightarrow Y) \equiv (X \vee Y)$

## 6. TAUTOLOGIES ET CONTRADICTIONS

### 6.1. Définitions.

- Une *tautologie* est une formule dont la table de vérité ne contient que des “**V**”.
- Une *contradiction* est une formule dont la table de vérité ne contient que des “**F**”.

Remarquez que la plupart des formules ne sont ni des tautologies ni des contradictions.

6.2. **Exemple.** La table

$X$	$Y$	$(X \wedge Y) \Rightarrow (X \vee Y)$
<b>V</b>	<b>V</b>	<b>V</b>
<b>V</b>	<b>F</b>	<b>V</b>
<b>F</b>	<b>V</b>	<b>V</b>
<b>F</b>	<b>F</b>	<b>V</b>

montre que  $(X \wedge Y) \Rightarrow (X \vee Y)$  est une tautologie.

6.3. **Exemple.** La table

$X$	$X \vee \neg X$
<b>V</b>	<b>V</b>
<b>F</b>	<b>V</b>

montre que  $X \vee \neg X$  est une tautologie.

6.4. **Exemple.** La table

$X$	$X \wedge \neg X$
<b>V</b>	<b>F</b>
<b>F</b>	<b>F</b>

montre que  $X \wedge \neg X$  est une contradiction.

6.5. **Exercice.** La formule  $X \Rightarrow \neg X$  est-elle une contradiction ? (Ne répondez pas trop vite !)

*Remarque.* La formule **V** est une tautologie (quelles que soient les valeurs de vérité de  $X, Y, Z, \dots$ , la formule est vraie). Similairement, la formule **F** est une contradiction. En fait :

*Une tautologie est une formule équivalente à la formule **V** ;  
une contradiction est une formule équivalente à la formule **F**.*

6.6. **Exercice.** À l'aide de tables de vérité, décidez si les formules suivantes sont des tautologies, contradictions, ou ni l'une ni l'autre :

- (a)  $(X \wedge Y) \Leftrightarrow \neg(X \Rightarrow \neg Y)$       (b)  $(X \Rightarrow Y) \vee (Y \Rightarrow X)$       (c)  $(X \vee Y) \Leftrightarrow \neg(X \Rightarrow \neg Y)$   
 (d)  $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C))$   
 (e)  $(A \Rightarrow (B \vee C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C))$

## 7. CONTRAPOSÉE ET RÉCIPROQUE D'UNE IMPLICATION

7.1. **Définition.** La *contraposée* de  $(X \Rightarrow Y)$  est  $(\neg Y \Rightarrow \neg X)$ .

La *réciproque* de  $(X \Rightarrow Y)$  est  $(Y \Rightarrow X)$ .

Comparons les tables de vérité des trois formules :

	Contraposée de $X \Rightarrow Y$			Réciproque de $X \Rightarrow Y$					
	$X$	$Y$	$X \Rightarrow Y$	$X$	$Y$	$\neg Y \Rightarrow \neg X$	$X$	$Y$	$Y \Rightarrow X$
	<b>V</b>	<b>V</b>	<b>V</b>	<b>V</b>	<b>V</b>	<b>V</b>	<b>V</b>	<b>V</b>	<b>V</b>
	<b>V</b>	<b>F</b>	<b>F</b>	<b>V</b>	<b>F</b>	<b>F</b>	<b>V</b>	<b>F</b>	<b>V</b>
	<b>F</b>	<b>V</b>	<b>V</b>	<b>F</b>	<b>V</b>	<b>V</b>	<b>F</b>	<b>V</b>	<b>F</b>
	<b>F</b>	<b>F</b>	<b>V</b>	<b>F</b>	<b>F</b>	<b>V</b>	<b>F</b>	<b>F</b>	<b>V</b>

Ces tables de vérité montrent que :

$X \Rightarrow Y$  est équivalente à sa contraposée mais pas à sa réciproque.

7.2. **Exemple.** Les deux phrases :

- (i) *Si une matrice est inversible, alors elle n'a aucune ligne nulle.*  
 (ii) *Si une matrice a une ligne nulle, alors elle n'est pas inversible.*

sont deux manières de dire la même chose. Ceci illustre le fait qu'une implication est équivalente à sa contraposée (chacune des phrases est la contraposée de l'autre). Comparez ensuite les deux phrases suivantes:

- (i) *Si une matrice est inversible, alors elle n'a aucune ligne nulle.*
- (iii) *Si une matrice n'a aucune ligne nulle, alors elle est inversible.*

Remarquez que (iii) est la réciproque de (i). Ces deux phrases ne disent pas la même chose ; en fait, (i) est **V** et (iii) est **F**.

**7.3. Exercice.** Pour chacune des implications suivantes, donnez (a) la contraposée et (b) la réciproque.

- (1) Si  $x = 0$  alors  $xy = 0$ .
- (2) Si  $s > 0$  alors  $s^2 > 0$ . (Remarque : la négation de  $x > 0$  est  $x \leq 0$ .)
- (3) Si  $d$  est un diviseur de 6, alors  $d$  est un diviseur de 30.
- (4) Si la matrice  $A$  est inversible, alors elle est carrée et ne contient aucune ligne nulle.
- (5) Si deux entiers sont pairs, alors leur somme est paire.
- (6) Si une fonction est différentiable en  $x = 2/3$ , alors elle est continue en  $x = 2/3$ .
- (7) Si la série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, alors la suite  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge et sa limite est 0.
- (8) Si les fonctions  $f$  et  $g$  sont continues, alors la fonction  $f - g$  est continue.

## 8. QUELQUES REMARQUES SUR LES TRADUCTIONS FRANÇAIS $\rightarrow$ LOGIQUE

$$\left. \begin{array}{l} P \text{ et } Q \\ P, \text{ mais } Q \\ P, \text{ bien que } Q \\ P, \text{ pourtant } Q \\ P, \text{ même si } Q \end{array} \right\} (P \wedge Q)$$

$$\left. \begin{array}{l} P \text{ ou } Q \\ P, \text{ ou encore } Q \\ P, \text{ à moins que } Q \\ P, \text{ sauf si } Q \\ P, \text{ sinon } Q \end{array} \right\} (P \vee Q)$$

Le ou exclusif (appelé "XOR" en informatique) est rarement utilisé en français :

$$\left. \begin{array}{l} P \text{ ou } Q, \text{ mais pas les deux} \\ \text{ou bien } P, \text{ ou bien } Q \\ \text{soit } P, \text{ soit } Q \\ \textit{either } P \textit{ or } Q \end{array} \right\} ((P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)), \quad \text{ou encore } \neg(P \Leftrightarrow Q)$$

D'après certains livres de grammaire “*either P or Q*” est un ou exclusif mais, dans la langue de tous les jours, les anglophones l'utilisent habituellement comme un “ou” ordinaire (inclusif).

La phrase ni l'un ni l'autre (ou “NOR” en informatique) :

$$\left. \begin{array}{l} \text{ni } P \text{ ni } Q \\ \text{neither } P \text{ nor } Q \end{array} \right\} (\neg P \wedge \neg Q), \quad \text{ou encore } \neg(P \vee Q)$$

L'implication

	Phrase française	Formule logique
(1)	$A$ implique $B$	$(A \Rightarrow B)$
(2)	Si $A$ alors $B$	
(3)	Si $A$ , $B$	
(4)	$B$ si $A$	
(5)	$A$ seulement si $B$	
(6)	$B$ est une condition nécessaire pour $A$	
(7)	Pour $A$ , il est nécessaire que $B$	
(8)	Pour $A$ , il faut que $B$	
(9)	$A$ est une condition suffisante pour $B$	
(10)	Pour $B$ , il suffit que $A$	

**8.1. Exemple.** Étant donnée une matrice carrée  $M$ , on considère les phrases  $A = “M$  est inversible”,  $B = “M$  n’a aucune ligne nulle”.

Voici dix manières de traduire  $(A \Rightarrow B)$  en français :

- (1) “ $M$  est inversible” implique “ $M$  n’a aucune ligne nulle”.
- (2) Si  $M$  est inversible alors elle n’a aucune ligne nulle.
- (3) Si  $M$  est inversible, elle n’a aucune ligne nulle.
- (4)  $M$  n’a aucune ligne nulle si elle est inversible.
- (5)  $M$  est inversible seulement si elle n’a aucune ligne nulle.
- (6) “ $M$  n’a aucune ligne nulle” est une condition nécessaire pour que  $M$  soit inversible.
- (7) Pour que  $M$  soit inversible, il est nécessaire qu’elle n’ait aucune ligne nulle.
- (8) Pour que  $M$  soit inversible, il faut qu’elle n’ait aucune ligne nulle.
- (9) “ $M$  est inversible” est une condition suffisante pour que  $M$  n’ait aucune ligne nulle.
- (10) Pour que  $M$  n’ait aucune ligne nulle, il suffit qu’elle soit inversible.

**8.2. Exercice.** Répétez l'exemple ci-dessus avec  $A = “la$  fonction est différentiable” et  $B = “la$  fonction est continue”.

La biconditionnelle
---------------------

Phrase française	Formule logique
$P$ si et seulement si $Q$	$(P \Leftrightarrow Q)$
$P$ est équivalent à $Q$	
$P$ équivaut à $Q$	
$P$ est nécessaire et suffisant pour $Q$	
Pour $P$ , il faut et il suffit que $Q$	

8.3. **Exemple.** Les phrases suivantes ont la même signification que :

$$n \text{ est impair} \Leftrightarrow n^2 \text{ est impair.}$$

- (1)  $n$  est impair si et seulement si  $n^2$  est impair.
- (2) “ $n$  est impair” est équivalent à “ $n^2$  est impair”.
- (3) “ $n$  est impair” équivaut à “ $n^2$  est impair”.
- (4) “ $n$  est impair” est nécessaire et suffisant pour que  $n^2$  soit impair.
- (5) Pour que  $n$  soit impair, il faut et il suffit que  $n^2$  soit impair.

8.4. **Exemple.** L'exemple suivant montre la grande importance du concept de connectif principal dans l'analyse de la structure d'une proposition.

**Traduire en logique propositionnelle :**

*Si Jean va à l'école seulement si Catherine ne va ni à l'école ni travailler, alors ni l'un ni l'autre ne va à l'école à moins que les deux aillent travailler.*

**en utilisant les atomes suivants :**

- $J$  : Jean va à l'école.  
 $C$  : Catherine va à l'école.  
 $J_1$  : Jean va travailler.  
 $C_1$  : Catherine va travailler.

**SOLUTION.** On procède par étapes.

- (1) Soulignons le connectif principal (la virgule nous donne un indice) :  
*Si Jean va à l'école seulement si Catherine ne va ni à l'école ni travailler, alors ni l'un ni l'autre ne va à l'école à moins que les deux aillent travailler.*
- (2) Remplaçons le connectif souligné par “ $\Rightarrow$ ” :  
*(Jean va à l'école seulement si Catherine ne va ni à l'école ni travailler)  
 $\Rightarrow$  (ni l'un ni l'autre ne va à l'école à moins que les deux aillent travailler)*
- (3) Soulignons le connectif principal de chaque composante principale :  
*(Jean va à l'école seulement si Catherine ne va ni à l'école ni travailler)  
 $\Rightarrow$  (ni l'un ni l'autre ne va à l'école à moins que les deux aillent travailler)*
- (4) Remplaçons les connectifs soulignés à l'étape précédente par des symboles logiques :  
*( (Jean va à l'école)  $\Rightarrow$  (Catherine ne va ni à l'école ni travailler) )  
 $\Rightarrow$  ( (ni l'un ni l'autre ne va à l'école)  $\vee$  (les deux vont travailler) )*

(5) Remplaçons les propositions atomiques par leurs symboles :

$$( J \Rightarrow ( \text{ni } C \text{ ni } C_1 ) ) \Rightarrow ( (\text{ni } J \text{ ni } C ) \vee ( J_1 \wedge C_1 ) )$$

(6) Remplaçons  $(\text{ni } C \text{ ni } C_1)$  par  $[\neg C \wedge \neg C_1]$  et  $(\text{ni } J \text{ ni } C)$  par  $[\neg J \wedge \neg C]$  :

$$( J \Rightarrow [\neg C \wedge \neg C_1] ) \Rightarrow ( [\neg J \wedge \neg C] \vee [J_1 \wedge C_1] )$$

8.5. **Exercice.** En utilisant les atomes :

S : *Marie sortira*

T : *La mère de Marie se couche tôt,*

traduisez en logique la phrase suivante :

*Marie sortira seulement si sa mère se couche tôt, mais sa mère se couche tôt seulement si Marie reste à la maison.*

### ÉQUIVALENCES ET TRADUCTIONS

Les équivalences de formules sont parfois utiles pour travailler avec des phrases écrites en français. Voici quelques exemples.

8.6. **Exemple.** L'équivalence  $\neg(X \Rightarrow Y) \equiv (X \wedge \neg Y)$  nous permet d'affirmer que la négation de la phrase "si  $x \neq 0$  alors  $x = 1$ " est la phrase " $x \neq 0$  et  $x \neq 1$ ".

8.7. **Exemple.** Cherchons la négation de la phrase

$$\text{"}f \text{ est continue et } f(0) = 0\text{"}.$$

Si vous répondez " $f$  est discontinue et  $f(0) \neq 0$ ", vous commettez une erreur. En effet, une des lois de De Morgan dit que  $\neg(X \wedge Y) \equiv (\neg X \vee \neg Y)$ , donc :

$$\begin{aligned} \neg(f \text{ est continue et } f(0) = 0) &\equiv \neg(f \text{ est continue}) \text{ ou } \neg(f(0) = 0) \\ &\equiv f \text{ est discontinue ou } f(0) \neq 0, \end{aligned}$$

donc la bonne réponse est " $f$  est discontinue ou  $f(0) \neq 0$ ".

8.8. **Exercice.** Donnez la négation de chacune des phrases suivantes :

(1)  $x = 1$  ou  $y = 3$

(2) Si  $f$  est continue et  $a = 1$  alors  $f(3) = 0$ .

(3) Si  $f$  est continue alors  $f(3) = 0$  et  $f(4) = 0$ .

(4) Pour que  $f$  soit continue, il faut que  $a = 2$  et que  $b = 3$ .

(5) Pour que  $f$  soit continue, il suffit que  $a = 2$  et que  $b = 3$ .