(1) (2 pts) Dans la matrice suivante remplacer α par **le dernier chiffre** de votre numéro d'étudiant. Après trouver la matrice A satisfaisant l'équation suivante:

$$\left(A^T + 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ma réponse: $A =$________________

on a alors.

$$A + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} = A + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

d'où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & \alpha - 2 \\ -5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

(2) (2 pts) Soient les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

lesquelles sont échelonnées et lesquelles sont échelonnées réduites.

Ma réponse: $A =$ ________________

→ A et C sont échelonnées réduites

→ B ne l'est pas à cause de la colonne 3

→ D est échelonnée mais pas réduite à cause de la colonne 3

→ E n'est pas échelonnée à cause de la colonne 1.

→ F est échelonnée mais pas réduite à cause de la colonne 4

(3) (3 pts) (a) Un système linéaire avec 4 variables et 5 équations a toujours une infinité de solutions. Vrai ou Faux? (Aucune justification n'est requise).

Faux ; car une équation peut être par exemple $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1$.

Ma réponse: ________________

(b) Si le système linéaire $AX = B$ n'admet pas de solution, alors toute forme échelonnée de la matrice augmentée du système a une ligne de zéros. Vrai ou Faux? (pas de justification requise).

Faux ; par exemple $0 \cdot x = 1$ n'a pas de solution et la matrice augmentée $[0 \mid 1]$ n'admet pas une ligne de zéros

Ma réponse: ________________

(c) Si un système linéaire admet 5 équations et 4 variables, le rang de la matrice augmentée est au plus égal à ... (pas de justification requise):

Ma réponse: ________________

la matrice augmentée $[A \mid B]$ est alors une matrice 5×5.

~~the~~ rang de $[A \mid B]$ est alors au plus égal à 5

(4) (2 pts) Soient A et B deux matrices 3×4. Quelle est la formule correcte? Le terme (23) de $A^T B = (c_{ij})$ est

(A) $c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{32} + a_{24}b_{42}$
(B) $c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{32}$
(C) $c_{23} = a_{21}b_{31} + a_{22}b_{32} + a_{23}b_{32} + a_{24}b_{34}$
(D) $c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{32} + a_{24}b_{34}$
(E) $c_{23} = a_{12}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{32}b_{33}$
(F) $c_{23} = a_{12}b_{12} + a_{22}b_{23} + a_{32}b_{32} + a_{42}b_{42}$

Ma réponse: ______________

Soit $D = A^T = (d_{ij}) = (a_{ji})$.

donc

$$c_{23} = a_{12}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{32}b_{33}. \longleftarrow E$$

Car

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}$$

c_{23}

et

$$A^T . B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{c_{23} = a_{12}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{32}b_{33}}$$

(5) (2 pts) Soient A et B deux matrices. Vrai ou Faux?

(a) Si AB est définie, alors BA est aussi definie.

Faux car par exemple $A \to (1,2)$ et $B \to (2,3)$ alors $AB \to (1,3)$ alors que $B.A$ n'est pas possible.

Ma réponse: ________________

(b) Si A^2 peut être calculée, alors A doit être carrée.

Vrai ; car si $A \to m \times n$

Ma réponse: ________________

alors $A^2 = A.A$ n'est possible que si $m = n$ c'est à dire que A soit carrée

(6) (5 pts) Résoudre le système suivant et donner la solution:

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 0 \\ -x_1 & -x_2 & & +2x_4 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & & -2x_4 & = & 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \quad L_3 \to L_3 + L_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad L_2 \to L_2 + L_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad L_1 \to L_1 - 2L_2.$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

donc x_3 et x_4 libres.

$x_3 = s$

$x_4 = t$

et $x_2 = x_3 - 3x_4 = s - 3t$

$x_1 = -x_3 + 5x_4 = -s + 5t$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s+5t \\ s-3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ s \\ s \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +5t \\ -3t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$$= s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} +5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(7) (8 pts) Soit le système suivant:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ -x & - & y & + & pz & = & 4 \\ 3x & + & 4y & - & z & = & q \end{array}$$

oú p et q sont deux nombres réels.

(a) (6 pts) déterminer les valeurs de p et q pour lesquels le système admet:
  (i) une solution unique,
  (ii) aucune solution,
  (iii) infinité de solutions.

(b) (2 pts) dans le cas (iii) donner les solutions.

$L_2 \to L_2 + L_1$

$L_3 \to L_3 - 3L_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & p & 4 \\ 3 & 4 & -1 & q \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & p+1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & q+3 \end{array}\right]$$

maintenant.

$L_3 \to L_3 + 2L_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & p+1 & 3. \\ 0 & 0 & 2p-2 & q+9 \end{array}\right]$$

a) (i) si $2p-2 \neq 0 \Rightarrow p \neq 1 \Rightarrow$ une solution unique.

(ii) si $p=1$ et $q \neq -9 \Rightarrow$ pas de solution

(iii) si $p=1$ et $q=-9 \Rightarrow \infty^{\underline{té}}$ de solutions

et dans ce cas.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$L_1 \to L_1 - 2L_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0. \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \underline{z = t}$ (libre) et $y = \underline{3 - 2t}$

et $x = \underline{-7 + 3t}$