

Examen de mi-session 2

NOM de famille: Version B

Prénom: \_\_\_\_\_

- Durée: 80 minutes.
- Seules les calculatrices allouées par la Faculté des Sciences (Texas Instruments TI-30, TI-34 et Casio fx-260, fx-300) sont autorisées. Livres et notes de cours ne sont pas autorisés.
- Résoudre chaque problème dans l'espace prévu à cette fin. Utiliser le verso des pages comme brouillon si nécessaire.
- La question 1 consiste en 8 sous-questions vrai ou faux. Elle vaut 4 points. Les questions 2 à 5 sont à choix multiples et valent aussi chacune 2 points. Encerclez la réponse correcte. (Les réponses numériques sont arrondies à la dernière décimale indiquée.)
- Les questions 6 à 9 sont à développement et valent chacune 2 points. Elles requièrent une réponse détaillée. Prenez soin de bien rédiger votre solution.
- L'examen est noté sur 20.

*Tâchez de réserver au moins 40 minutes pour les questions à développement 6 à 9.*

## Vrai ou Faux?

1. [4 points] Déterminez dans chaque cas si l'énoncé donné est vrai ou faux et encerclez la bonne réponse.

Si $0 \leq a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq 0$ et si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ est convergente, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente.	Vrai Faux
Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente. (1)	Vrai Faux
Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .	Vrai Faux
Si la série alternée $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ satisfait $0 < a_{n+1} < a_n$ pour tout $n \geq 0$ , alors elle est convergente. (2)	Vrai Faux
La série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ est convergente de somme $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$ quels que soient $a$ et $r$ . (3)	Vrai Faux
Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente, alors elle est absolument convergente. (4)	Vrai Faux
Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.	Vrai Faux
Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left  \frac{a_{n+1}}{a_n} \right  = 1$ , alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente. (5)	Vrai Faux

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$  bien que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

(2) Il faut aussi que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(3) Si  $a \neq 0$ , il faut que  $|r| < 1$ .

(4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  est convergente mais non absolument convergente.

(5)  $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1|}{|1|} = 1$

2. [2 pts] La somme de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{20}{(n+3)(n+2)}$  est

A: 5    B: 6    C: 7    D: 8    E: 9    **F: 10**

$$\frac{20}{(n+3)(n+2)} = \frac{20((n+3)-(n+2))}{(n+3)(n+2)} = \frac{20}{n+2} - \frac{20}{n+3}$$

$$\sum_{n=0}^k \frac{20}{(n+3)(n+2)} = \sum_{n=0}^k \frac{20}{n+2} - \sum_{n=0}^k \frac{20}{n+3}$$

$$= \left( \frac{20}{2} + \frac{20}{3} + \dots + \frac{20}{k+2} \right) - \left( \frac{20}{3} + \frac{20}{4} + \dots + \frac{20}{k+3} \right)$$

$$= \frac{20}{2} - \frac{20}{k+3} \rightarrow 10 \text{ si } n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{20}{(n+3)(n+2)} = \boxed{10}$$

3. [2 pts] La somme de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 5^{n+2}}{7^{n+1}}$  est

A:  $-\frac{25}{2}$     B:  $-\frac{13}{2}$     **C:  $-\frac{49}{4}$**     D:  $-\frac{61}{7}$     E:  $-\frac{5}{12}$     F:  $-\frac{3}{25}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 5^{n+2}}{7^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{7^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{n+2}}{7^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n - \frac{25}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n$$

$$= \frac{1/7}{1-3/7} - \frac{25/7}{1-5/7}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{25}{2}$$

$$= -\frac{49}{4}$$

4. [2 pts] Quelle est la plus petite valeur de  $k$  pour laquelle on est certain que la somme partielle

$$s_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^{7/2}} \text{ approxime la série } S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/2}} \text{ avec une erreur d'au plus } 10^{-4}?$$

(A) 28      B: 37      C: 41      D: 61      E: 77      F: 89

Comme  $f(x) = \frac{1}{x^{7/2}}$  est décroissante pour  $x \geq 1$ , on a

$$\begin{aligned} R_k = |S - s_k| &\leq \int_k^{\infty} \frac{1}{x^{7/2}} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -\frac{2}{5} x^{-5/2} \right]_k^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( -\frac{2}{5} t^{-5/2} + \frac{2}{5} k^{-5/2} \right) = \frac{2}{5} k^{-5/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On demande } \frac{2}{5} k^{-5/2} \leq 10^{-4} &\Leftrightarrow k^{5/2} \geq \frac{2}{5} \times 10^4 \Leftrightarrow k \geq (4000)^{2/5} \\ &\Leftrightarrow k \geq 27.6... \Leftrightarrow \boxed{k \geq 28} \end{aligned}$$

5. [2 pts] On sort un fromage Brie du réfrigérateur pour qu'il se réchauffe avant le repas. La température initiale du fromage à sa sortie du réfrigérateur est de  $6^\circ\text{C}$ . Après 20 minutes, elle est de  $14^\circ\text{C}$ . En supposant que la température du fromage obéisse à la loi du réchauffement de Newton, quelle sera sa température 40 minutes après l'avoir sorti du réfrigérateur si la température de la pièce est de  $22^\circ\text{C}$ ?

A:  $12.5^\circ\text{C}$     B:  $14^\circ\text{C}$     C:  $16.5^\circ\text{C}$     (D)  $18^\circ\text{C}$     E:  $19.5^\circ\text{C}$     F:  $21^\circ\text{C}$

Soit  $T(t)$  la température du fromage après  $t$  minutes.

$$\text{On a: } \frac{dT}{dt} = k(T-22), \quad T(0)=6, \quad T(20)=14$$

$$\Rightarrow \int \frac{dT}{T-22} = \int k dt \Rightarrow \ln|T-22| = kt + C \Rightarrow |T-22| = e^{kt+C}$$

$$\Rightarrow T-22 = A e^{kt} \text{ où } A = \pm e^C \Rightarrow T = 22 + A e^{kt}$$

$$T(0) = 6 \Rightarrow 6 = 22 + A \Rightarrow A = -16 \Rightarrow T(t) = 22 - 16 e^{kt}$$

$$T(20) = 14 \Rightarrow 14 = 22 - 16 e^{20k} \Rightarrow e^{20k} = \frac{22-14}{16} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{20} \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow k \cong -0.03466$$

$$\Rightarrow T(40) = 22 - 16 e^{40k} = 22 - 16 e^{2 \ln\left(\frac{1}{2}\right)} = 22 - 16 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boxed{18}$$

6. [2 pts] À l'aide du test de comparaison, déterminez si la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+2\cos(n)}{5n^3+3n+2}$  est convergente ou divergente. Prenez soin de rédiger une solution claire.

$$2 = 4 - 2 \leq 4 + 2\cos(n) \leq 4 + 2 = 6$$

$$5n^3 \leq 5n^3 + 3n + 2 \leq 10n^3 \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{10n^3} \leq \frac{4+2\cos(n)}{5n^3+3n+2} \leq \frac{6}{5n^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+2\cos(n)}{5n^3+3n+2} \leq \frac{6}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$$

↪ Série de Riemann avec  $p=3 > 1$ .

7. [2 pts] Déterminez le rayon de convergence de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(x-3)^n}{n^2}$ .

terme général  $a_n = \frac{5^n(x-3)^n}{n^2}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{5^{n+1}|x-3|^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{5^n|x-3|^n} = 5|x-3| \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

$$\rightarrow 5|x-3| \text{ si } n \rightarrow \infty$$

D'après le test de d'Alembert, la série

$$\text{converge si } 5|x-3| < 1 \Leftrightarrow |x-3| < \frac{1}{5}$$

$$\text{diverge si } 5|x-3| > 1 \Leftrightarrow |x-3| > \frac{1}{5}$$

Son rayon de convergence est  $R = \frac{1}{5}$ .

8. [2 pts] Sachant que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{5^n \sqrt{n}}$  est convergente si  $|x-4| < 5$  et divergente si  $|x-4| > 5$ , déterminez son intervalle de convergence. (Vous devez déterminer si la série est convergente aux extrémités et justifier vos réponses.)

$$|x-4| < 5 \Leftrightarrow -5 < x-4 < 5 \Leftrightarrow \boxed{-1 < x < 9}$$

• En  $x = -1$ , la série devient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{5^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

série alternée avec  $\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$  fonction décroissante de  $n$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ . Donc elle est convergente.

• En  $x = 9$ , elle devient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty \quad (\text{série de Riemann avec } p = \frac{1}{2} \leq 1)$$

$\Rightarrow$  L'intervalle de convergence est  $[-1, 9)$ .

9. [2 pts] a) Développez la fonction  $f(x) = \frac{3}{1+2x}$  en série de puissances de  $x$  (série de MacLaurin).

$$\begin{aligned} \frac{3}{1+2x} &= \frac{3}{1-(-2x)} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n \quad \text{si } |-2x| < 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 3(-2)^n x^n \quad \text{si } |x| < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) Étant donné la série  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{5^n}$ ,

(i) donnez un développement en série pour  $g'(3)$ ,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^{n-1}}{5^n} \\ \Rightarrow g'(3) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^{n-1}}{5^n} \end{aligned}$$

(ii) et un autre pour  $\int_0^4 g(x) dx$ .

$$\begin{aligned} \int_0^4 g(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^4 \frac{nx^n}{5^n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{nx^{n+1}}{5^n(n+1)} \right]_0^4 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n 4^{n+1}}{(n+1) 5^n} \end{aligned}$$